Physique et Applications en Biologie

Travaux Dirigés, Sujets d’examens

Loi de Stokes.
Centrifugation.
La perfusion.
Transport transmembranaire.
Potentiel de diffusion.
Frictions visqueuses et évaluation de charges électriques.
Raccordement veineux.
Résistances vasculaires équivalentes.
Sédimentation, mesure de masses molaires.
Potentiel membranaire.
Pontage cardiaque.
Débitmètre de Venturi.
Équilibre de Donnan: application au plasma sanguin.
Modèle simplifié de potentiel post synaptique.
Loi de Waldens.
Modèle d'axoplasme.
Baromètre à deux liquides.
Chaîne cellulaire : modèle d'axone.
Potentiel de diffusion.
Réponse d'axones à de faibles stimulations.
Potentiel de Nernst et relation de Goldman.
Débitmètre de Prandtl.
Conductivité molaire.
Loi de Fick. Extraction d'iode.
Câbles neuronaux.

II – Loi de Stokes - Centrifugation

Des particules assimilables à des sphères de volume $\frac{4}{3}\pi a^3$, de masse volumique ρ, se déplacent sous l'action de la force de gravitation dans un fluide de viscosité η et de masse volumique ρ_0.

Elles subissent trois forces : la force de pesanteur $\vec{P}$, la poussée d'Archimède $\vec{F}$ et la force de résistance visqueuse $\vec{R} = -6\pi\eta a \vec{v}$ où a est le rayon et $\vec{v}$ la vitesse des particules (voir figure 3)

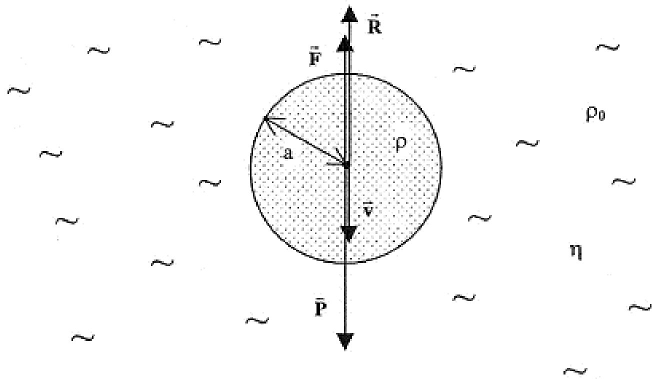


Figure 3

1) La norme F de $\vec{F}$ étant égale au poids du volume de fluide déplacé, montrez que

$$F = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_0 g \qquad (g = 9{,}81\ ms^{-2}).$$

2) En appliquant le principe fondamental de la dynamique, montrez qu'une vitesse limite $\vec{V}_s$ est atteinte par les particules ($\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$ pour $\vec{v} = \vec{V}_s$), appelée vitesse de sédimentation, dont la norme est de la forme :

$$V_s = \alpha \frac{a^2}{\eta}(\rho - \rho_0) g \qquad (E)$$

Donnez la valeur de la constante α.

3) Quelle est la vitesse limite V_s de particules de poussière de rayon 10^{-5} m, de masse volumique $\rho = 2\ g.cm^{-3}$ se déplaçant dans de l'air de masse volumique $\rho_0 = 1{,}2\ kg.m^{-3}$ et de viscosité $\eta = 1{,}81\ 10^{-5}$ Pa.s ?

4) Des macromolécules d'hémoglobine de masse molaire M = 68 kg, de masse volumique $\rho = 1330\ kg.m^{-3}$, assimilables à des sphères de rayon a sont en suspension dans de l'eau ($\rho_0 = 1000\ kg.m^{-3}$), de viscosité $\eta = 0{,}695\ 10^{-3}$ Pa.s .

a) Calculez leur rayon a (Nombre d'Avogadro $N = 6{,}023\ 10^{23}$).

b) Calculez leur vitesse limite V_s.

5) Pour augmenter cette vitesse de sédimentation très faible (quelques centaines de nanomètres par jour), on dispose l'ensemble considéré en 4) dans une centrifugeuse tournant à une vitesse angulaire ω. Dans l'équation (E), g est alors remplacée par $\omega^2 r$ où r est la distance de la chambre à l'axe de rotation.

Calculez la vitesse limite V_s pour $\omega = 6000\ rad.s^{-1}$ et r = 10 cm.

6) Pour des particules non sphériques, la force de résistance visqueuse est de la forme $\vec{R} = -\delta\eta\vec{v}$ où δ est une constante, η la viscosité du fluide et $\vec{v}$ la vitesse des particules.

a) En appliquant le principe fondamental de la dynamique, montrez que l'expression de la vitesse limite V_s est dans ce cas :

$$V_s = \frac{g}{\delta\eta} m \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)$$

où ρ et ρ_0 sont les masses volumiques respectivement des particules et du fluide et m la masse d'une particule.

b) Les particules sont les molécules de virus de la mosaïque de tabac de masse volumique $\rho = 1370\ kg.m^{-3}$ en suspension dans l'eau, et telles que $\delta = 1{,}16\ 10^{-6}$ m (à 37°C). Ces virus sont disposés dans une centrifugeuse dont l'accélération centripète est $\omega^2 r = 2\ g\ 10^5$, avec $g = 9{,}81\ m.s^{-2}$. La vitesse limite V_s (de sédimentation) dans l'eau est $V_s = 3{,}7\ 10^{-5}\ m.s^{-1}$.

Calculez la masse de la molécule de virus de la mosaïque du tabac.

I Ref 1) F = poids volume déplacé

volume $\frac{4}{3}\pi a^3$

Fluide ρ_0 kg/m³ Poids F = $\frac{4}{3}\pi a^3 \rho_0 g$

2) $m\frac{dv}{dt} = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho g - 6\pi\eta a v - \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_0 g$

$0 = \frac{4}{3}\pi a^3 g(\rho-\rho_0) - 6\pi\eta a V_s$

$V_s = \frac{2}{9}\frac{a^2}{\eta}(\rho-\rho_0) g$ $\alpha = \frac{2}{9}$

3) $V_s = \frac{2}{9}\frac{(10^{-5})^2\ 9.81\ (2000)}{1.81\ 10^{-5}}$ $\rho_0 \ll \rho$

$= \frac{4}{9}\frac{9.81}{1.81}\ 10^{-2} = 2,40\ 10^{-2}\ \text{m s}^{-1}$

4) a) $M = \mathcal{N} m = \mathcal{N}\rho\ \frac{4}{3}\pi a^3$ $\rho = 1,33\ 10^{-3}$ kg cm⁻³ $= 1,33\ 10^3$ kg m⁻³

$a = \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\mathcal{N}\rho}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 68}{4 \cdot \pi \cdot 6,02\ 10^{23} \cdot 1,33\ 10^3}}$

$= \sqrt[3]{\frac{204\ \ 10^{-28}}{100,56}} = \sqrt[3]{2,03\ 10^{-26}}$

$= \sqrt[3]{2030\ 10^{-27}} = 2.70\ 10^{-9}\text{m}$

b) $V_s = \frac{2}{9}\frac{(2,70\ 10^{-9})^2}{0,695\ 10^{-3}}(\underbrace{1.33\ 10^3 - 10^3}_{0.33\ 10^3})\ 9,81$

$= \frac{2 \times 7,29}{6,255} \times 3.23\ \ 10^{-18}\ 10^6$

$= \frac{47,09}{6,255}\ 10^{-12} = 7,53\ 10^{-12}$ m/s

Rep 1

$= 7{,}53\ 10^{-12} \times 3600 \times 24 = 650500\ 10^{-12}$ m/jour

$= 650{,}5\ 10^{-9}$ m/jour $= 650{,}5$ nanomètres/jour

5) $V_s = \frac{2}{9} \frac{a^2}{\eta} (\rho - \rho_m)\, \omega^2 r = \frac{650{,}5\, 10^{-9}}{9{,}81} \times (6000)^2\ 0{,}1$ m/jour

$= 66{,}31\ 10^{-9} \times 36 \times 10^6 \times 0{,}1 = 2387{,}15 \times 10^{-4}$ m/j $= 0{,}24$ m/j

$= 24$ cm/j

6) a) $\vec{F} = -\delta\eta \vec{v}$

Poussée Archimède $F = \rho_0 V g = \rho_0 \frac{m}{\rho} g$

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \delta\eta v - \rho_0 \frac{m}{\rho} g$$

$\frac{dv}{dt} = 0 \qquad mg - \delta\eta V_s - \rho_0 \frac{m}{\rho} g = 0$

$$V_s = \frac{1}{\delta\eta} mg \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)$$

b) $g \to \omega^2 r$

$$V_s^{\text{centrifugeuse}} = \frac{m}{\delta\eta} \omega^2 r \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)$$

$$m = \frac{V_s^{\text{centri.}}\ \delta\eta}{\omega^2 r \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)}$$

$$m = \frac{3{,}7\ 10^{-5} \times 1{,}16\ 10^{-6}\ 10^{-3}\ 0{,}695}{2.10^5 \times 9{,}81 \left(1 - \frac{1000}{1370}\right)}$$

$$= \frac{0{,}152}{0{,}27}\ 10^{-14}\ 10^{-5} = 0{,}563\ 10^{-19}\ \text{kg}$$

(3,39 10^7 amu)

Rep 2

Faculté des Sciences de Luminy

DEUG SV1 Année 1998-99

Physique et Applications en Biologie

Session de Juin

Les candidats(es) peuvent disposer d'un formulaire personnel *manuscrit* constitué de 3 feuillets recto au format A4 (feuilles quadrillées à petits carreaux). Seules sont autorisées les calculatrices non programmables. Note finale pour la Physique dans l'unité U2 sur 20: Test 15 points, Rapport: 5 points. La note de Travaux Pratiques sur 20 est comptabilisée dans l'unité U5.

I La perfusion.

Chaque tube représenté sur la figure 1 a une extrémité au contact de l'air, à la pression atmosphérique P_{atm} ($P_{atm} = 10^5 Pa$), l'autre extrémité plongeant dans un liquide de perfusion de masse volumique ρ ($\rho = 2,5\ 10^3 kg/m^3$). Le tube coudé a pour fonction de transmettre , en M à l'intérieur du liquide, la pression atmosphérique P_{atm} de manière constante. Donc $P_A = P_M = P_S = P_{atm}$. L'autre tube est vertical et transmet le liquide.

1)Calculez la pression en N en appliquant la loi de *Pascal*. En admettant que $v_N = 0$, calculez la vitesse d'écoulement du liquide en S en appliquant la loi de *Bernouilli*, $p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = Cste$ où p est la pression, v la vitesse du fluide, g la constante de gravitation et z la variable suivant l'axe vertical oz $(h = 1m, h_0 = 20cm)$. .

2)A l'extrémité S, on place à présent une aiguille qui pénètre dans la veine d'un patient où règne une pression P_V ($P_V = \frac{3}{4}P_{atm}$). Calculez la vitesse d'écoulement du liquide en S. Si l'aiguille a une section $\Sigma = 0,5mm^2$, quel est le débit Q du liquide ? Quelle est le volume de liquide perfusé en une heure, exprimé en litres ?

3) Le débit calculé dans la question 2) est en fait trop grand car on a négligé les effets de viscosité du liquide. Soit $\eta = 4\ 10^{-3} Pa.s$ le coefficient de viscosité du liquide et a le rayon du tube NS. En appliquant la loi de *Poiseuille*

$P_N - P_S = \Re Q$ où $\Re$ est la résistance vasculaire ($\Re = \frac{8\eta h}{\pi a^4}$) et Q le débit, calculez le volume de liquide perfusé en une heure (section du tube $NS = 0,8 mm^2$).

II Transport transmembranaire.

Soit un fluide réparti dans les compartiments (1) et (2), de volumes V_1et V_2 (figure 2) séparés par une membrane de surface S. Le compartiment (1) contient un soluté de concentration C_1 et le compartiment (2) contient ce même soluté à la concentration C_2. Initialement, C_1 est plus grand que C_2. On désire déterminer le temps d'égalisation des 2 concentrations. La densité de courant des particules de soluté $J(t)$ s'exprime à tout instant par la relation (loi de *Fick*)

$$J(t) = p(C_1(t) - C_2((t))$$

où p est appelée la perméabilité de la membrane, $C_1(t)$ et $C_2((t)$ étant les concentrations à l'instant t. (On admet que les concentrations dans les 2 compartiments restent homogènes.)

Soient $N_1(t)$ et $N_2(t)$ les nombres de molécules de soluté dans les compartiments (1) et (2). On a $N(t) = N_1(t) + N_2(t) = Cste$. De plus

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = -SJ(t) \text{ et } \frac{dN_2(t)}{dt} = SJ(t)$$

1) Exprimez simplement $N_1(t)$ en fonction de $C_1(t)$ et V_1. Idem pour $N_2(t)$, $C_2(t)$ et V_2.

2) Montrez que $V_1C_1(t) + V_2C_2(t) = Cste$

3) Donnez $\frac{dC_1(t)}{dt}$et $\frac{dC_2(t)}{dt}$en fonction de $S, p, V_1, V_2, C_1(t)$ et $C_2(t)$.

4) Quand $t- > \infty$, $C_1(t) \approx C_2(t) \approx C(\infty)$. Si $C_1(0)$ et $C_2(0)$ désignent les concentrations initiales, déduire de 2) $C(\infty)$ en fonction de $C_1(0)$, $C_2(0)$, V_1 et V_2.

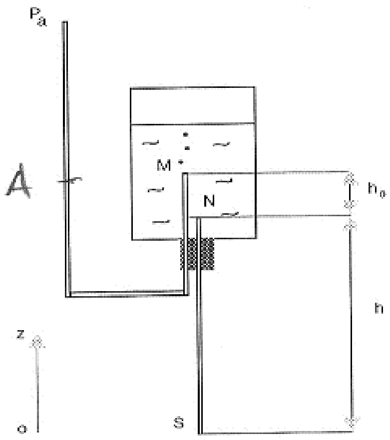


Figure 1

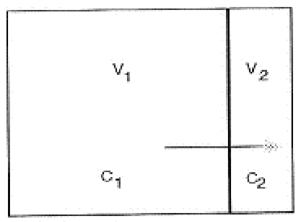


Figure 2

5) Déduire de 3) l'équation donnant la variation de différence de concentrations dans les 2 compartiments

$$\frac{d\Delta C}{dt} = -\alpha \Delta C \qquad (E)$$

où $\Delta C = C_1(t) - C_2(t)$. Exprimez α en fonction de S, p, V_1 et V_2.

A.N. De l'urée diffuse à travers une membrane de $2m^2$, pour laquelle le coefficient de perméabilité est $p = 5.63\ 10^{-4} cm.s^{-1}$. Pour $V_1 = 40\ litres$ et $V_2 = 0,5\ litres$, calculez le temps caractéristique de l'expérience $\tau = \frac{1}{\alpha}$ en heures.

6) Exprimez ΔC en fonction de t, α, $C_1(0)$ et $C_2(0)$ par intégration de l'équation (E).
En déduire, à l'aide de 2) et 4), l'expression de $C_1(t)$ en fonction de $C(\infty)$, $C_1(0)$ et α, idem pour $C_2(t)$ en fonction de $C(\infty)$, $C_2(0)$ et α.

La perfusion

Rep : 1) Bernouilli entre N et S

$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = cte$

Pascal entre M et N

$P_N = P_M + \rho g h_0 = P_{atm} + \rho g h_0$

AN : $10^5 + 2,5 \cdot 10^3 \cdot 9,81 \cdot 0,2 = 104900$ Pa

$\frac{1}{2}\rho v_N^2 + p_N + \rho g z_N = \frac{1}{2}\rho v_S^2 + P_{atm} + \rho g z_S$

où $p_N = P_{atm} + \rho g h_0$

d'où $\frac{1}{2}\rho v_S^2 = \rho g h_0 + \rho g (z_N - z_S)$

$= \rho g h_0 + \rho g h$

$v_S = \sqrt{2g(h + h_0)}$ AN : $v_S = 4,852\ m s^{-1}$

2) Bernouilli

$\frac{1}{2}\rho v_S^2 = \rho g h + (P_{atm} - P_V) + \rho g h_0$

$= \rho g (h + h_0) + P_{atm} - P_V$

d'où $v_S = \sqrt{2\left[g(h + h_0) + \frac{P_{atm} - P_V}{\rho}\right]}$

AN : $P_V = \frac{3}{4} P_{atm}$ $\frac{P_A - P_V}{\rho} = \frac{0,25\ 10^5}{2,5\ 10^3} = 10$ $v_S = 6,60\ m s^{-1}$

Débit $Q = v_S S$

AN : $Q = 3,30 \cdot 10^{-6}\ m^3 s^{-1}$

$V_{ol} = 3,30 \cdot 10^{-6} \cdot 3600 = 11877\ 10^{-6} m^3 \approx 11,88\ \ell$

3) $P_N - P_S = P_{atm} + \rho g h_0 - P_V$

Volume du liquide par seconde

$$Q_1 = \left(\frac{P_{atm} + \rho g h_0 - P_V}{8 \eta \ell}\right) \pi a^4$$

Par heure $= Q_1 \times 3600$

AN : Volume perfusé en une heure = 0,68 ℓ

II Transport transmembranaire

Rep :

1) $N_1(t) = C_1(t) V_1$

$N_2(t) = C_2(t) V_2$

2) $N_1(t) + N_2(t) = C_1(t) V_1 + C_2(t) V_2 = cte$

3) $\frac{dN_1}{dt} = V_1 \frac{dC_1}{dt} = -JS = -pS(C_1 - C_2)$

$\frac{dN_2}{dt} = V_2 \frac{dC_2}{dt} = +JS = pS(C_1 - C_2)$

4) : $V_1 C_1(0) + V_2 C_2(0) = (V_1 + V_2) C_\infty$

$$\boxed{C_\infty = \frac{1}{(V_1+V_2)}\left(V_1 C_1(0) + V_2 C_2(0)\right)}$$

5) : $\frac{dC_1}{dt} = -\frac{pS}{V_1}(C_1 - C_2)$

$\frac{dC_2}{dt} = +\frac{pS}{V_2}(C_1 - C_2)$

$\Rightarrow \frac{d(C_1 - C_2)}{dt} = \left(-\frac{pS}{V_1} - \frac{pS}{V_2}\right)(C_1 - C_2)$

$$\boxed{\alpha = pS\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}\right)}$$

6) Exprimer $\Delta C = C_1 - C_2$ en fonction de t - Conclusion

Rep $\Delta C = (\Delta C)_0 \, e^{-\alpha t}$

α mesure le temps d'égalisation (ΔC) $\quad \Delta C = C_1 - C_2 \rightarrow 0$

7) Déduire de 1) et 3) l'expression de $C_1(t)$ ... en fonction de C_∞, $C_1(0)$ et α, idem pour $C_2(t)$ en fonction de C_∞, $C_2(0)$ et α.

Rep : $\Delta C = C_1 - C_2 = (C_1(0) - C_2(0))\, e^{-\alpha t}$ (1)

$V_1 C_1 + V_2 C_2 = (V_1 + V_2) C_\infty = V_1 C_1(0) + V_2 C_2(0)$ (2)

⇒ En multipliant (1) par V_2 et en faisant la somme (1) + (2)

$$C_1 V_2 - C_2 V_2 = V_2 (C_1(0) - C_2(0))\, e^{-\alpha t}$$

$$C_1 V_1 + C_2 V_2 = (V_1 + V_2) C_\infty$$

$$C_1 (V_1 + V_2) = V_2 (C_1(0) - C_2(0))\, e^{-\alpha t} + (V_1 + V_2) C_\infty$$

On tire $V_2 C_2(0)$ de (2)

$$V_2 C_2(0) = (V_1 + V_2) C_\infty - V_1 C_1(0)$$

D'où
$$C_1 (V_1 + V_2) = V_2 C_1(0)\, e^{-\alpha t} - [(V_1 + V_2) C_\infty - V_1 C_1(0)]\, e^{-\alpha t} + (V_1 + V_2) C_\infty$$

$$= (V_1 + V_2) C_1(0)\, e^{-\alpha t} + (V_1 + V_2) C_\infty (1 - e^{-\alpha t})$$

et $\boxed{C_1(t) = (C_1(0) - C_\infty)\, e^{-\alpha t} + C_\infty}$

D'autre part, en multipliant (1) par V_1 et en faisant la différence entre (2) et (1)

$$V_1 C_1 - V_1 C_2 = V_1 (C_1(0) - C_2(0))\, e^{-\alpha t}$$

$$V_1 C_1 + V_2 C_2 = (V_1 + V_2) C_\infty$$

$$\Rightarrow (V_1 + V_2) C_2 = (V_1 + V_2) C_\infty - V_1 (C_1(0) - C_2(0))\, e^{-\alpha t}$$

Il faut tirer $C_1(0)$ en fonction de $C_2(0)$

$$V_1 C_1(0) = (V_1+V_2) C_\infty - V_2 C_2(0)$$

D'où
$$(V_1+V_2) C_2 = (V_1+V_2) C_\infty - \left[(V_1+V_2) C_\infty - V_2 C_2(0)\right] e^{-\alpha t} + V_1 C_2(0) e^{-\alpha t}$$

$$(V_1+V_2) C_2 = (V_1+V_2) C_\infty \left(1 - e^{-\alpha t}\right) + C_2(0) e^{-\alpha t} (V_1+V_2)$$

et
$$C_2 \equiv C_2(t) = C_\infty \left(1 - e^{-\alpha t}\right) + C_2(0) e^{-\alpha t}$$

$$\boxed{C_2(t) = \left(C_2(0) - C_\infty\right) e^{-\alpha t} + C_\infty}$$

AN : En supposant $V_2 \gg V_1$, de l'urée diffuse à travers une membrane de $2\,m^2$, pour laquelle le coefficient de perméabilité est $p = 5{,}63\ 10^{-6}$ m/s. Pour $V_1 = 40\,l$, calculez le temps caractéristique d'égalisation de concentrations d'urée $\tau = \frac{1}{\alpha}$ en heures.

$$\boxed{\alpha = pS\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}\right) \qquad \tau = \frac{1}{\alpha}}$$

$$\alpha = 5{,}63\ 10^{-6}\ m.s^{-1} \times 2\,m^2 \left(\frac{1}{40.10^{-3}} + \frac{1}{0.5\,10^{-3}}\right)$$

$$= 11{,}26\,10^{-6}\left(0{,}025\ 10^3 + 2\ 10^3\right)$$

$$= 11{,}26 \times 2{,}025\ 10^3\ 10^{-6}$$

$$= 22{,}801 \cdot 10^3\ 10^{-6}$$

$$= 0{,}022801$$

$$\tau = 43{,}85\ h$$

Faculté des Sciences de Luminy
DEUG SV1

Année 2001-2002

Physique et Applications en Biologie
Session de Juin

Les candidat(e)s peuvent disposer d'un formulaire manuscrit composé de 3 pages recto au format A4. Les calculatrices sont autorisées.

1 Potentiel de diffusion

Soit une solution de $NaCl$, qui à un instant initial, possède une concentration C_1 dans la partie inférieure d'un tube et une concentration $C_2 < C_1$ dans la partie supérieure (voir figure 1). Les ions Na^+ et Cl^- vont diffuser de la région de forte concentration vers la région de faible concentration avec des mobilités différentes μ_{Na} et μ_{Cl} ($\mu_{Na} < \mu_{Cl}$).

Ceci entraine l'apparition de charges électriques de part et d'autre de la surface de séparation et une différence de potentiel ΔV y est créée. Soit $E = -\frac{dV(x)}{dx}$ le champ électrique qui en résulte. Les densités de courant d'électrodiffusion des ions Na^+ et Cl^- sont:

$$j_+ = -\mu_{Na}\left(kT\,\frac{dC_{Na}(x)}{dx} + q\,C_{Na}(x)\,\frac{dV(x)}{dx}\right)$$
$$j_- = -\mu_{Cl}\left(kT\,\frac{dC_{Cl}(x)}{dx} - q\,C_{Cl}(x)\,\frac{dV(x)}{dx}\right).$$

$C_{Na}(x)$ et $C_{Cl}(x)$ sont les concentrations ioniques variables près de la surface de séparation, sur une faible épaisseur où on admet que $C_{Na}(x) \sim C_{Cl}(x) = C(x)$. En dehors de cette faible épaisseur, les concentrations sont C_1 pour $x < 0$ et C_2 pour $x > 0$. T est la température absolue de la solution, $q = 1,6\,10^{-19}Cb$ ($q > 0$), $k = 1,38\,10^{-23}J/K$ est la constante de Boltzmann.

1. Le courant électrique total $j_e = q(j_+ - j_-)$ étant nul, montrez que le potentiel $V(x)$ et l[a] concentration $C(x)$ sont reliées par une équation différentielle de la forme

$$\frac{dV(x)}{dx} = \frac{a}{C(x)}\frac{dC(x)}{dx}.$$

Donnez a en fonction de k, T, q, μ_{Na} et μ_{Cl}.

2. Intégrez cette équation de part et d'autre de la surface de séparation pour en déduire la différence de potentiel ΔV en fonction de a et du rapport $\frac{C_2}{C_1}$.

3. A.N. $\frac{C_2}{C_1} = 0,2$ et $T = 320K$. On donne les coefficients de diffusion D_{Na} et D_{Cl} des ions Na^+ et Cl^- : $D_{Na} = 1,33\,10^{-9}m^2/s$, $D_{Cl} = 2,03\,10^{-9}m^2/s$. Rappel: $\mu_{Na} = \frac{D_{Na}}{kT}$, $\mu_{Cl} = \frac{D_{Cl}}{kT}$.

2 Friction visqueuse et évaluation de charges électriques

Une goutte de glycérine, de forme sphérique, de masse volumique ρ, de rayon r est en chute libre dans de l'air. Elle subit une force de résistance visqueuse opposée à la vitesse $\vec{v}$ de la forme $\vec{R} = -6\,\pi\,\eta\,r\,\vec{v}$ où η est le coefficient de viscosité de l'air.

1. La goutte atteint sa vitesse limite v_0 quand son accélération devient nulle. Elle parcourt alors $16mm$ en $20s$. En négligeant la poussée d'Archimède, et en appliquant le principe fondamental de la Dynamique, donnez une relation entre v_0, ρ, η, r et g ($g = 9,81m/s^2$). A.N. $\rho = 1,25\ 10^3 kg/m^3$, $\eta = 1,8\ 10^{-5} Pa.s$. Donnez la valeur numérique de r.

2. Cette goutte de glycérine est à présent électrisée. Elle possède une charge Q positive et est disposée entre 2 plaques d'un condensateur distantes de $e = 3\ cm$ aux bornes duquel est appliquée une différence de potentiel $U = 40000 Volts$ (voir figure 2).

Le module du champ électrique E est $E = \frac{U}{e}$ et le module de la force électrique est $F = QE$. Dans ces conditions, la goutte a une vitesse limite $v_1 < v_0$ telle qu'elle parcourt $10,53mm$ en $20s$. En utilisant 1) afin d'exprimer le poids de la goutte, donnez une relation existant entre v_0, v_1, η, r, E et Q. Calculez la valeur numérique de Q. Commentez cette valeur.

3 Question de cours

Exprimez, sans la démontrer, la loi de conservation de Bernoulli, pour un fluide non visqueux en mouvement.

Illustrez cette loi par deux applications: le tube de Pitot et l'effet Venturi.

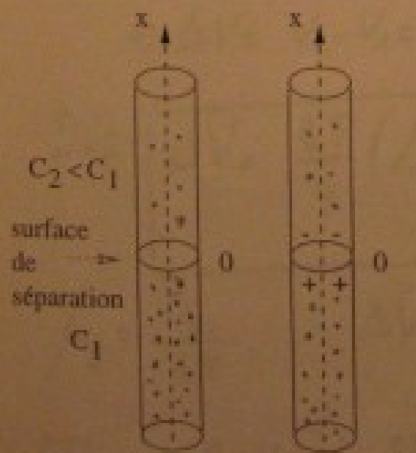


figure 1

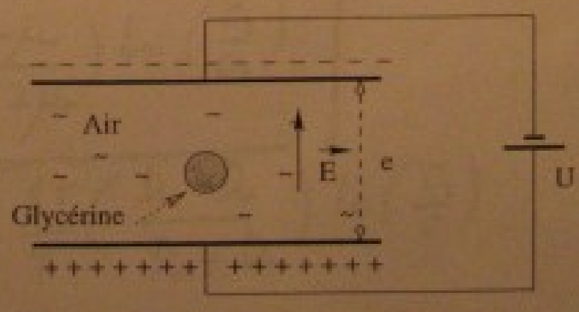


figure 2

Barème: Sur 20 points. 1) 8 points, 2) 7 points, 3) 5 points.

Rep I) Soit $\mu_{Na^+} = \mu_+$ $\mu_{Cl^-} = \mu_-$

$j_+ = j_- \Rightarrow$ $C_{Na^+}(x) = C_{Cl^-}(x) = C(x)$

$$-\mu_+\left(kT\frac{dC}{dx} + qC\frac{dV}{dx}\right) = -\mu_-\left(kT\frac{dC}{dx} - qC\frac{dV}{dx}\right)$$

$$\Rightarrow -\mu_+\left(\frac{kT}{qC}\frac{dC}{dx} + \frac{dV}{dx}\right) = -\mu_-\left(\frac{kT}{qC}\frac{dC}{dx} - \frac{dV}{dx}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dx}(\mu_- + \mu_+) = \frac{kT}{qC}(\mu_- - \mu_+)\frac{dC}{dx}$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{kT}{qC}\left(\frac{\mu_- - \mu_+}{\mu_- + \mu_+}\right)\frac{dC}{dx}$$

$$\Rightarrow a = \frac{kT}{q}\left(\frac{\mu_- - \mu_+}{\mu_- + \mu_+}\right)$$

$$\frac{dV}{dx} = a\,\frac{1}{C}\frac{dC}{dx} \Rightarrow \int_1^2 dV = a\int_1^2 \frac{dC}{C}$$

$$\Rightarrow \Delta V = V_2 - V_1 = a\ln\left(\frac{C_2}{C_1}\right)$$

D'où $\boxed{\Delta V = \frac{kT}{q}\left(\frac{\mu_- - \mu_+}{\mu_- + \mu_+}\right)\ln\left(\frac{C_2}{C_1}\right)}$

$\mu_\pm = \frac{D_\pm}{kT}$ $\quad \Delta V = \frac{kT}{q}\left(\frac{D_- - D_+}{D_- + D_+}\right)\ln\left(\frac{C_2}{C_1}\right)$

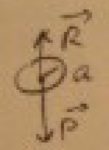
$$\frac{kT}{q} = \frac{1{,}38\ 10^{-23}\ 320}{1{,}6\cdot 10^{-19}} = 276\ 10^{-4} = 27{,}6\ 10^{-3}$$

$$\Delta V = 27{,}6\ 10^{-3}\left(\frac{2{,}03 - 1{,}33}{2{,}03 + 1{,}33}\right)\ln(0{,}2)$$

$$= 27{,}6\ 10^{-3}\ \frac{0{,}7}{3{,}36}(-1{,}6) = -9{,}2\ 10^{-3} = -9{,}2\ \text{mV}$$

Rep I

Ex II

1- 

$$^{3}\cancel{6}\cancel{\pi}\cancel{a}\,\eta v_0 = mg = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{3}\cancel{\pi}a^{\cancel{3}2}\rho g$$

$$3\eta v_0 = \frac{2}{3}a^2\rho g$$

$$a^2 = \frac{9}{2}\frac{\eta v_0}{\rho g} \qquad a = \sqrt{\frac{9\eta v_0}{2\rho g}}$$

$$v_0 = \frac{16\cdot10^{-3}}{20} = 8\,10^{-4}\,ms^{-1}$$

$$a = \sqrt{\frac{9\ 1{,}8\ 10^{-5}\ 8\cdot10^{-4}}{2\times1{,}25\ 10^{3}\ 9{,}81}} = \sqrt{\frac{9\ 1{,}8\ 8}{2{,}5\ 9{,}81}}\ 10^{-6}$$

$$= \sqrt{5{,}28}\ 10^{-6} = 2{,}29\ 10^{-6}\,m$$

$$\approx 2{,}3\,\mu m$$

2. $$E = \frac{U}{e} = \frac{40\,000}{3\cdot10^{-2}} = 1{,}33\ 10^{6}\ V/m$$

$$v_1 = \frac{10{,}53\ 10^{-3}}{20} = 0{,}52\ 10^{-3}\ m/s = 5{,}2\ 10^{-4}\ m/s$$

$$0 = -R_1 + mg - QE$$

$$= -6\pi\eta a v_1 + 6\pi\eta a v_0 - QE$$

$$\Rightarrow QE = 6\pi\eta a(v_0 - v_1)$$

$$Q = \frac{6\pi\eta a(v_0 - v_1)}{E}$$

AN: $$Q = \frac{6\cdot3{,}14\cdot1{,}8\ 10^{-5}\ 2{,}3\ 10^{-6}}{1{,}33\ 10^{6}}\underbrace{(8\ 10^{-4} - 5{,}2\ 10^{-4})}_{2{,}8\ 10^{-4}}$$

$$= \frac{218{,}39}{1{,}33\ 10^{6}}\ 10^{-15} =$$

$$= 1{,}6\ 10^{-19}\ C \quad (!)$$

3.Sédimentation, mesure de masses molaires (5 points)

Des macromolécules, constituant un soluté, de masse m et de masse volumique ρ, sont en suspension dans un liquide de masse volumique ρ'. Elles subissent trois forces: la force de pesanteur $\overrightarrow{P}$, la poussée d'Archimède $\overrightarrow{F}$ et la force de friction $\overrightarrow{R} = -\alpha\overrightarrow{V}$, où $\overrightarrow{V}$ est la vitesse des macromolécules et $\alpha > 0$ est un coefficient de friction.

1) Montrez que le module de $\overrightarrow{F}$ est $F = \frac{m\rho'}{\rho}g$

2) En appliquant le principe fondamental de la dynamique, montrez qu'une vitesse limite $\overrightarrow{V_s}$ est atteinte pour les macromolécules, appelée vitesse de sédimentation, dont le module est donné par

$$V_s = \frac{g}{\alpha}m(1-\frac{\rho'}{\rho})$$

3) Soit une macromolécule d'hémoglobine de masse molaire $M = 68000g$, de masse volumique $\rho = 1,33\, gcm^{-3}$, qui peut être assimilée à une sphère de rayon a, en suspension dans de l'eau ($\rho' = 1000\, kgm^{-3}$), de coefficient de viscosité $\eta = 10^{-3}\, Pa\, s$. Sachant que $\alpha = 6\pi\eta a$, que $a = 30$ Å, montrez que V_s est de l'ordre du micron par jour.

4) Pour augmenter cette vitesse, on dispose l'ensemble dans une centrifugeuse (chambre de sédimentation), tournant à une vitesse angulaire ω. Dans 2), g est remplacée par $\omega^2 r$, où r est la distance de la chambre à l'axe de rotation.

A.N. $\omega = 60000\, tours/minute$, $r = 10cm$. Montrez que V_s est alors de l'ordre de la centaine de microns par heure.

5) Montrez que, pour un soluté de densité donnée, constitué de molécules que l'on peut considérer comme shériques, cette méthode permet de déterminer leur masse molaire.

4.Potentiel membranaire (5 points)

Soit une cellule musculaire délimitée par une membrane d'épaisseur $\delta = 100$ Å, constituée d'une double couche chargée négativement à l'intérieur, avec une densité de charges $-\sigma$, et positivement à l'extérieur, avec une densité de charges $+\sigma$. La cellule étant au repos, on mesure une différence de potentiel $\Delta V = V_{in} - V_{ext}$ entre l'intérieur et l'extérieur du corps cellulaire.

1) Donnez l'expression de σ en fonction de $\Delta V, \delta$ et $\epsilon_0(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9\, 10^9 Nm^2/Cb^2)$

2) Montrez que σ est bien homogène à une charge par unité de surface.

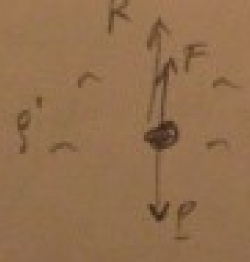
3) **A.N.** $\Delta V = -90mV$. Calculez σ.

3. Sédimentation, mesure de masses molaires

Rep

Pour chaque particule de soluté de masse m

1) Poussée d'Archimède F le poids du volume ~~liquide~~ de liquide déplacé (de masse volumique ρ')



$F = Mg$ où

$M = \rho' \, Vol$ où Vol est le volume d'une particule de soluté

$m = \rho \, Vol$ $\quad Vol = \frac{m}{\rho}$

Donc $F = \rho' \frac{m}{\rho} g$

(2)

2) >0 vers le bas

$$m\frac{dV}{dt} = mg - \alpha V - \frac{m\rho'}{\rho} g$$

$= 0$ vitesse limite

$$\Rightarrow \alpha V_s = \left(m - \frac{m\rho'}{\rho}\right) g \qquad \boxed{V_s = \frac{mg}{\alpha}\left(1 - \frac{\rho'}{\rho}\right)}$$

(cf aussi Exp Perrin)

3) M = masse molaire = $\mathcal{N} m$ $\quad \mathcal{N}$ Avogadro

$\alpha = 6\pi\eta a$ (Formule de Stokes)

$$V_s = \frac{M}{\mathcal{N}} \frac{g}{6\pi\eta a}\left(1 - \frac{\rho'}{\rho}\right)$$

$$V_s = \frac{68}{6{,}02\ 10^{23}} \frac{9{,}81}{6\pi \cdot 10^{-3} \cdot 150\ 10^{-10}}\left(1 - \frac{1000}{1330}\right)$$

AN:

$\rho = 1{,}33\ g/cm^3 = 1{,}33\ 10^6\ g/m^3 = 1{,}33\ 10^3\ kg/m^3$

pas correct ici $= \frac{667{,}08}{3402{,}50}\ 0{,}25\ 10^{-10}$

$= 0{,}049\ 10^{-10}$

$= 4{,}9\ 10^{-8}\ m/s$

AN: $V_s = 48{,}64\ 10^{-13}\ m/s$ $\qquad 1\text{Å} = 10^{-8}\ m$

$\simeq 4{,}9\ 10^{-8}\ m/s$

3)

4) $v_s = \frac{V_s}{g} \times \omega^2 r = \frac{48,67\ 10^{-13}}{9,81} \times 10^6 \times 0,1$

$\omega = 60\,000$ tours/mn $= 4,95\ 10^{-13}\ 10^5 = 4,95\ 10^{-8}$ m/s

$= \frac{60\,000}{60}$ tours/s $= 1000$ tours/s $= 4,95\ 10^{-8} \times 3600$ m/h

$= 17849\ 10^{-8}$ m/h

$0,017\ 849$

$17849\ 10^{-8}\ 10^3$ mm/h

$0,17849$ mm

$180\ \mu/h$

0.18 mm/h

5) $V_s = \frac{\omega^2 r}{4\pi\eta a} \frac{M}{\mathcal{N}} \left(1 - \frac{1}{d}\right)$ $d = \frac{\rho}{\rho'}$ = densité

$\omega, r, \eta, a, d, V_s$ connus $\Longrightarrow M$ masse molaire

— N —

(4)

Faculté des Sciences de Luminy
DEUG Sciences

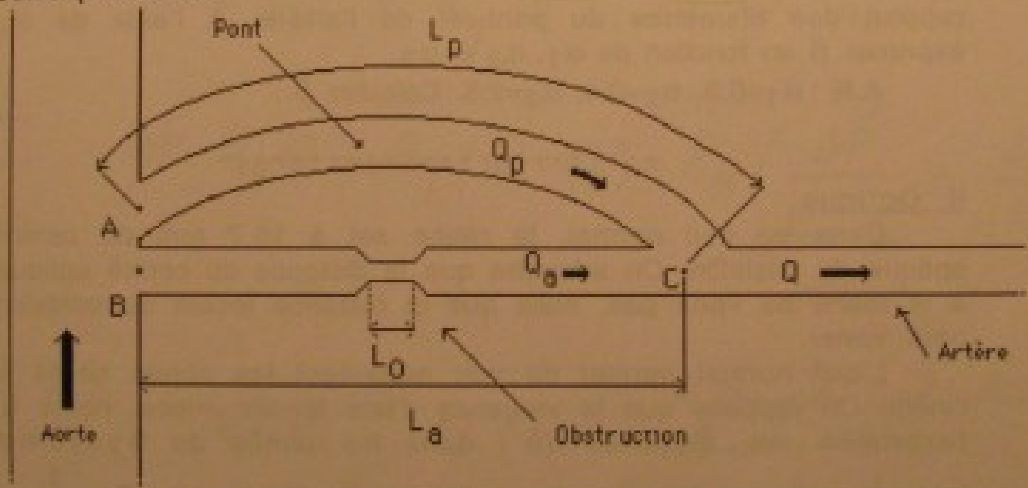
Physique et Applications en Biologie
Module M4P

Rédiger les deux exercices sur deux copies séparées

Les candidat(e)s peuvent disposer d'un formulaire personnel <u>manuscrit</u> constitué de trois feuillets recto au format A4 (feuilles quadrillées à petits carreaux). L'utilisation de calculatrices <u>non programmables</u> est autorisée.

I Pontage

Une artère connectée à l'aorte présente une obstruction partielle. On réalise un pontage dont le principe est indiqué sur la figure, avec L_0, L_a et L_p les longueurs de l'obstruction, de l'artère et du pont et d_0, d_a, d_p, les diamètres des vaisseaux correspondants.



On désigne par Q_a et Q_p les débits dans l'artère (avant le pont) et le pont ; $Q = Q_a + Q_p$ est le débit dans l'artère après le pont. Les écoulements considérés vérifient la loi de Poiseuille : pour un vaisseau de rayon a de longueur L, parcouru par un fluide de viscosité η, la chute de pression est $\Delta P = R\ Q$ où $R = \dfrac{8\eta L}{\pi a^4}$, Q étant le débit.

Les points **A** et **B** sont supposés être à la même pression (grand diamètre de l'aorte par rapport à celui de l'artère, petite distance entre **A** et **B**).

R_0 et R_a désignent les résistances vasculaires de l'obstruction et des portions non obstruées de l'artère, entre **B** et **C**, R_p désigne la résistance du pont.

1) Exprimer la différence de pression entre **A** et **C** dans le pont puis entre **B** et **C** dans l'artère.

2) Si on remplace le système de canalisations par un seul vaisseau de résistance R_{eq}, quelle serait la différence de pression dans ce vaisseau entre **B** et **C**?

En utilisant 1), déduire l'expression de R_{eq} en fonction de R_0, R_a et R_p.

3) Quand l'artère n'est pas obstruée (le pont n'étant pas nécessaire), la résistance entre **B** et **C** est appelée R'_a. Donner la relation entre L_0, L_a, L_p, d_0, d_a, et d_p pour que le débit **Q** soit identique dans le système ponté et dans l'artère non obstruée.

4) On donne $\dfrac{L_0}{L_a} = \alpha_1$, $\dfrac{d_0}{d_a} = \alpha_2$, $\dfrac{L_p}{L_a} = \alpha_3$. On appelle $\beta = \dfrac{d_p}{d_a}$ le rapport des diamètres du pont et de l'artère. A l'aide de 3), exprimer β en fonction de α_1, α_2 et α_3.

A.N : $\alpha_1=0{,}3$, $\alpha_2=0{,}4$, $\alpha_3=2{,}5$. Calculez β.

****

II Optique

Dans un oeil normal, la rétine est à 16,7 mm du centre optique du cristallin. On admettra que la distance du centre optique à la rétine ne varie pas, mais que la distance focale du cristallin peut varier.

L'oeil normal permet de voir nettement les objets situés à l'infini. On rappelle que la vergence d'une lentille mince, notée **C** (exprimée en dioptries (δ) dans les unités du **Système** International), est l'inverse de la distance focale image : $C = \dfrac{1}{SF'}$.

1) Calculer la distance focale et la vergence de l'oeil au repos, considéré comme une lentille mince.

2) Calculer sa vergence lorsqu'il observe à la distance minimale de vision distincte, c'est à dire 25 cm.

3) On appelle *diamètre apparent* d'un objet étendu, observé d'un point **O**, l'angle θ sous lequel cet objet est vu depuis ce point (voir la figure ci dessous).

Réponse - Pontage

1) On a $\Delta P = P_A - P_C = R_p Q_p$

D'autre part

$$P_B - P_C = R_0 Q_a + R_a Q_a$$

Remarque : , comme $P_A = P_B$

on a $\Delta P = (R_0 + R_a) Q_a$

2) Si on remplace le système de canalisation par un seul vaisseau

On a $\Delta P = P_B - P_C = R_{eq} Q$ où $Q = Q_a + Q_p$

D'où

$$\Delta P = R_{eq} Q = R_{eq}(Q_a + Q_p) = R_{eq}\left(\frac{\Delta P}{R_0 + R_a} + \frac{\Delta P}{R_p}\right)$$

Donc

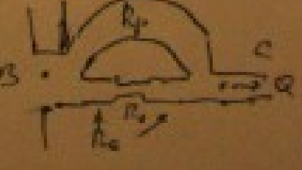
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_0 + R_a} + \frac{1}{R_p}$$

On aurait pu le faire directement

(R_0 et R_a en série) en dérivation avec R_p

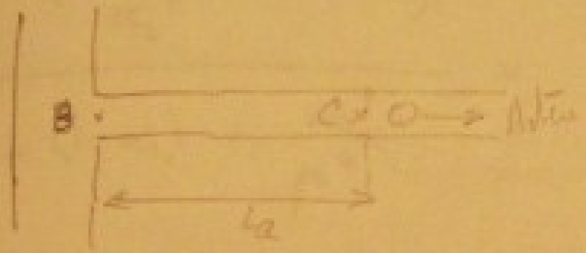
et

$$\boxed{R_{eq} = \frac{(R_0 + R_a) R_p}{R_p + R_0 + R_a}}$$



(3)

3) Le débit Q devant être le même qu'avant l'obstruction on doit avoir



$$\Delta P = P_B - P_C = R'_a Q$$

où R'_a est la résistance vasculaire entre B et C sans obstruction

D'où

$$R_{eq} = R'_a$$

D'après la formule donnant R_{eq}, on obtient

$$\frac{\dfrac{L_p}{r_p^4}\left(\dfrac{L_o}{r_o^4} + \dfrac{L_a - L_o}{r_a^4}\right)}{\dfrac{L_o}{r_o^4} + \dfrac{L_a - L_o}{r_a^4} + \dfrac{L_p}{r_p^4}} = \frac{L_a}{r_a^4}$$

3) $\dfrac{L_o}{L_a} = \alpha_1 \quad \dfrac{d_o}{d_a} = \alpha_2 \quad \dfrac{L_p}{L_a} = \alpha_3 \quad \beta = \dfrac{d_p}{d_a}$.

D'où

$$\frac{\dfrac{\alpha_3 L_a}{\beta^4 r_a^4}\left(\dfrac{\alpha_1 L_a}{\alpha_2^4 r_a^4} + \dfrac{L_a - \alpha_1 L_a}{r_a^4}\right)}{\dfrac{\alpha_1 L_a}{\alpha_2^4 r_a^4} + \dfrac{L_a - \alpha_1 L_a}{r_a^4} + \dfrac{\alpha_3 L_a}{\beta^4 r_a^4}} = \frac{L_a}{r_a^4}$$

$$\frac{\frac{\alpha_3}{\beta^4}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2^4} + \cancel{1-\alpha_1}\right)}{\frac{\alpha_1}{\alpha_2^4} + (1-\alpha_1) + \frac{\alpha_3}{\beta^4}} = 1$$

$$\boxed{\frac{\alpha_3}{\beta^4}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2^4} + 1-\alpha_1\right) = \frac{\alpha_1}{\alpha_2^4} + (1-\alpha_1) + \frac{\alpha_3}{\beta^4}}$$

$\alpha_1 = 0.2$

$\alpha_2 = 0.5$

$\alpha_3 = 2$

$$\frac{2}{\beta^4}\left(\frac{0.2}{(0.5)^4} + 1-0.2\right) = \frac{0.2}{(0.5)^4} + (1-0.2) + \frac{2}{\beta^4}$$

$$\frac{2}{\beta^4}\left(\frac{0.2}{(0.5)^4} + 0.8\right) = \frac{0.2}{(0.5)^4} + 0.8 + \frac{2}{\beta^4}$$

$$\frac{2}{\beta^4}\left[\frac{0.2}{0.0625} + 0.8 - 1\right] = \frac{0.2}{0.0625} + 0.8$$

$$\frac{2}{\beta^4}(31,8) = 32,8$$

$$\beta^4 = \frac{2 \times 31,08}{32,08} = \frac{62,16}{32,08}$$

$\beta = 1.18$

-3-

Faculté des Sciences de Luminy — Année 2000-2001

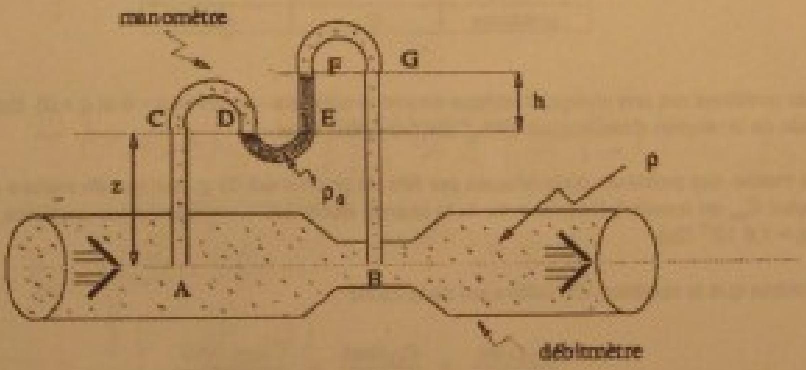
DEUG SV1

Physique et Applications en Biologie
Session de Juin

Les candidat(e)s peuvent disposer d'un formulaire personnel *manuscrit* constitué de 3 pages recto au format A4 et d'une calculatrice non programmable

I – Débitmètre de Venturi. (7,5 points)

Le flux sanguin à travers une artère d'un chien (non représentée sur la figure) est détourné dans un débitmètre de Venturi (voir figure)



Au point A, la section du débitmètre $S_A = 0{,}08\ cm^2$ (égale à celle de l'artère). Au point B, dans la partie rétrécie du débitmètre, la section est $S_B = 0{,}04\ cm^2$.

1- Rappelez la loi de Bernouilli reliant la pression P, la vitesse v, la masse volumique ρ, l'altitude z et la constante de gravitation g en différents points du flux.

2- A l'aide de la loi de Bernouilli, exprimez la différence de pression $\Delta P = P_A - P_B$ en fonction de ρ, v_A et v_B. Les effets dus à la viscosité sont négligés.

3- Le débit étant constant dans la canalisation, exprimez v_B en fonction de v_A, S_A et S_B.

4- A l'aide de 2- et 3-, exprimez v_A en fonction de ΔP, ρ, S_A et S_B.

5- Le manomètre (constitué des tubes coudés) contient un liquide manométrique de masse volumique ρ_0 en contact avec le sang en D et F. Les deux liquides sont immobiles dans le manomètre. A l'aide de la loi de Pascal, donnez P_A en fonction de P_C, ρ, g et z, puis P_B en fonction de P_F, ρ, g , h et z puis P_F en fonction de P_C, ρ_0, g et h. En déduire ΔP en fonction de g, h, ρ et ρ_0 . En utilisant 4-, exprimez la vitesse v_A en fonction des données.

6- Application numérique: $\rho = 1{,}06\ 10^3\ kg/m^3$, $\rho_0 = 1{,}25\ 10^3\ kg/m^3$, h = 2 cm et g = 9,81 m/s^2. Calculez la vitesse du flux sanguin dans l'artère du chien.

T.S.V.P

1

II – Equilibre de Donnan : application au plasma sanguin. (7,5 points)

Le plasma sanguin est constitué de structures capillaires membranaires, contenant divers électrolytes et des protéines (albumine, globuline, fibrinogène, ...) en équilibre électrique de Donnan avec un milieu interstitiel acqueux contenant également ces électrolytes. On donne les concentrations (en millimoles par litre : mmoles/l) des constituants ioniques prépondérants intérieurs et extérieurs à ces structures (voir tableau).

Ion	Intérieur	Extérieur
Na^+	151	144
Cl^-	109	114
HCO_3^-	28,7	30
protéines	C_{pr}	0

1- Les protéines ont une charge électrique moyenne négative $-zq$ (avec $z > 0$ et $q > 0$). Exprimez zC_{pr} à l'aide de la relation d'électroneutralité. Calculez cette valeur.

2- La masse des protéines plasmatiques par litre de plasma est 60 g, leur masse molaire est $50\ 10^3$ g. Calculez C_{pr} en mmole/l. Déduisez de 1- la charge électrique moyenne de ces protéines (on rappelle que $q = 1{,}6\ 10^{-19}$ Cb).

3- Montrez que la condition d'équilibre est de la forme :

$$\frac{C_{Na}(in)}{C_{Na}(ext)} = \frac{C_{Cl}(ext)}{C_{Cl}(in)} = \frac{C_{HCO_3}(ext)}{C_{HCO_3}(in)}$$

Cette relation est-elle vérifiée avec les valeurs données dans le tableau (dans la limite des erreurs expérimentales) ?

4- Calculez la différence de potentiel d'équilibre V_e à travers les structures membranaires si la température est $T = 300$ K (on rappelle que la constante de Boltzmann k vaut $1{,}38\ 10^{-23}$ Joules/K).

III - Question de cours : Modèle simplifié de potentiel postsynaptique. (5 points)

Pour un contact synaptique d'une dendrite sur un soma neuronal, rappelez l'expression du courant synaptique en termes d'une conductance variable, écrivez l'équation différentielle du potentiel membranaire, donnez la solution analytique de cette équation et esquissez une représentation graphique de cette solution.

Rép : 1) $p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = cte$

2) $p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$ $\quad z_A = z_B$

$p_A - p_B = \frac{1}{2}\rho(v_B^2 - v_A^2) > 0$

3) $v_A S_A = v_B S_B$

$v_B = v_A \frac{S_A}{S_B} > v_A$

4) $\Delta p = p_A - p_B = \frac{1}{2}\rho (v_A^2)\left(\left(\frac{S_A}{S_B}\right)^2 - 1\right)$

$v_A = \sqrt{\frac{2\,\Delta p}{\rho\left(\frac{S_A^2}{S_B^2} - 1\right)}}$

5) $p_A = p_C + \rho g z = p_E + \rho g z$

$p_B = p_G + \rho g (z+h) = p_F + \rho g (z+h)$

$p_E = p_F + \rho_0 g h$

La densité du liquide manométrique est 1,25

$\Delta p = p_A - p_B = (p_E - p_F) - \rho g h = \rho_0 g h - \rho g h$

$= (\rho_0 - \rho) g h$

Rép !

$$v_A = \sqrt{\frac{2(\rho_0-\rho)gh}{\rho\left(\frac{S_A^2}{S_B^2}-1\right)}}$$

6. AN: $\frac{\rho_0-\rho}{\rho} = \frac{1250-1060}{1060} = 0{,}179$

$$\frac{S_A^2}{S_B^2} = \left(\frac{0{,}08}{0{,}04}\right)^2 = 4$$

$$v_A = \sqrt{\frac{2\times 0{,}179\times 9{,}81\times 0{,}02}{3}} = 0{,}153\ m/s$$

N

Ef : D $z\,C_{pro} + 28{,}7 + 109 = 151$

$z\,C_{pro} = 151 - 137{,}7 = 13{,}3$ mmole/l

2) a)

Masse molaire = masse d'une mole

$M = \mathcal{N} m$ masse d'une molécule.

$m = \dfrac{50 \text{ kg}}{\mathcal{N}}$

Dans 1 litre, 60 g de protéines

Dans 1 m³, $60 \cdot 10^3$ g de protéine = 60 kg.

Le nombre de protéine par m³ est $\dfrac{60}{50/\mathcal{N}} = 1{,}2\,\mathcal{N}$.

$C_p = 1{,}2$ mole/m³

$= 1{,}2$ mole/10^3 l $= 10^{-3}\; 1{,}2$ mole/l.

$C_p = 1{,}2$ millimole/l

b) $z = \dfrac{13{,}3 \text{ mmole/l}}{1{,}2 \text{ mmole/l}} = 11{,}08$

$zq = 11{,}08 \times 1{,}6\;10^{-19} =$

$= 1{,}77\;10^{-18}$ C

$= 17{,}73\;10^{-19}$ C

-1-

a) $\frac{151}{144} \stackrel{?}{=} \frac{114}{109} = \frac{30}{28,7}$

1,049 1,046 1,045

b) $V_D = -\frac{kT}{q} \ln\left(\frac{C_{110}(in)}{C_{110}(ext)}\right)$

K: K_{ext}

$= -\frac{1,38 \cdot 10^{-23} \times 300}{1,6 \cdot 10^{-19}} \ln\left(\frac{151}{144}\right)$

1,048

0,0477

$V_D = -12,28 \cdot 10^{-4}\ V$

$= -1,22 \cdot 10^{-3}\ V = -1,22\ mV$

—— N ——

Question de cours

Cas d'un contact synaptique d'une dendrite sur un soma neuronal - Modèle simplifié

$I_{ext}(t) = I_{syn}(t)$

$v(t) \equiv v_{psp}(t)$ = Potentiel postsynaptique

Le courant synaptique peut s'exprimer sous la forme suivante

$$I_{syn}(t) = g(t)\,(v - v_s)$$

$v_s \rightarrow$ constante.

$g(t)$: conductance synaptique

Si v_s suffisamment < 0 $\Rightarrow$ synapse inhibitrice

Si v_s suffisamment > 0 $\Rightarrow$ synapse excitatrice

$g(t) = 0 \quad t < 0 \quad t > \Delta$

$g(t) = g_{max} \quad 0 < t < \Delta$

Des portes (canaux) s'ouvrent ($g \neq 0$) puis se referment ($g = 0$) sur la membrane pour laisser passer les neuromédiateurs.

On a :

$$C_m \frac{dv}{dt} = -\frac{v}{R_m} + g(t)\,(v_s - v)$$

$$= -\frac{[illegible]}{C_m} v + \begin{cases} g_{syn}\,(v_s - v) & 0 < t < \Delta \\ 0 & t > \Delta \end{cases}$$

$$C_m \frac{dv}{dt} = -(g_m + g_{syn})v + g_{syn} v_s \qquad 0 < t < \Delta$$

Equation différentielle avec 2nd membre

Solution = Solution générale Equa diff. sans 2nd membre + solution particulière avec 2nd membre.

$$v(t) = B e^{-(g_m + g_{syn})\frac{t}{C_m}}$$

$$v = c^{te} = A$$

$$0 = -(g_m + g_{syn})A + g_{syn} v_s$$

$$\boxed{A = \frac{g_{syn}}{g_m + g_{syn}}}$$

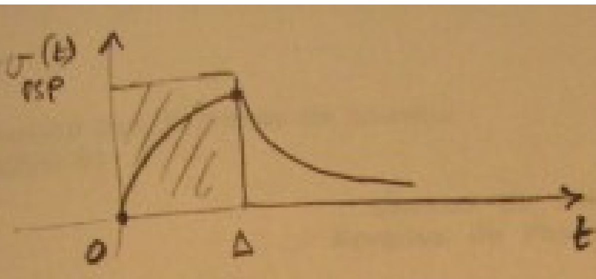
Soit $v(t) = B e^{-(g_m + g_{syn})\frac{t}{C_m}} + \frac{g_{syn}}{g_m + g_{syn}} v_s$

$t=0 \quad v=0$

$$B = -\frac{g_{syn}}{g_m + g_{syn}} v_s.$$

$$\boxed{v_{PSP}(t) = \frac{g_{syn}}{g_m + g_{syn}} v_s \left(1 - e^{-(g_m + g_{syn})\frac{t}{C_m}}\right)}$$

$0 < t < \Delta$



$t > \Delta \qquad C_m \frac{dv}{dt} = -g_m v \qquad v(\Delta$

$$v(t) = C\, e^{-\frac{g_m}{C_m} t}$$

Raccordement des 2 solutions en $t = \Delta$

——— N ———

Faculté des Sciences de Luminy — Année 1996-97

DEUG B1

Session de Juin
Epreuve de Physique

Les candidat(e)s peuvent disposer d'un formulaire personnel <u>manuscrit</u> constitué de trois feuillets recto au format A4 (feuilles quadrillées à petits carreaux). L'utilisation de calculatrices <u>non programmables</u> est autorisée.
Note finale sur 20 : Travaux Pratiques : 6 points, Rapport : 3 points, Test : 11 points. Le barème du test est calculé sur 22 points, la note finale doit donc être divisée par 2.

<u>Exercice 1 (4 points)</u>

Soit le circuit ci dessous (voir figure 1) composé de 2 générateurs montés en parallèle. On appelle I_1, I_2 et I les intensités des courants circulant dans les éléments de ce circuit.

1) Etablir la loi des noeuds en A.

2) Exprimez I_1 et I_2 en fonction de (V_A-V_B) , E_1, r_1, E_2, et r_2. Exprimez I en fonction de (V_A-V_B) et R.

3) Trouvez R pour laquelle le courant I_2 est nul. Quel est alors le courant circulant dans R ? A.N.: E_1=20 V, r_1=5 Ω, E_2=15 V, r_2=2 Ω. Donnez R et I.

<u>Exercice 2 (5 points).</u>

Soit une solution de chlorure de Sodium dans l'eau à 10^{-3}moles.l^{-1}. Les coefficients de diffusion D_+ et D_- des ions Na^+ et Cl^- sont respectivement $D_+=1{,}33\ 10^{-9}\ m^2.s^{-1}$ et $D_-=2{,}03\ 10^{-9}\ m^2.s^{-1}$. On appelle C_+ et C_- les concentrations des ions Na^+ et Cl^-.

1) Montrez que $C_+=C_-=C=10^{-3}$moles.l^{-1}.

2) Rappelez l'expression de la conductivité σ de cette solution en fonction de C, q (charge élémentaire), k (constante de Boltzmann) T (température absolue), D_+ et D_-.

3) Calculez cette conductivité à la température ambiante (T=300°K). On rappelle que $q=1.6\ 10^{-19}$ Cb, $k=1{,}38\ 10^{-23}$ Joules.°K^{-1}. Retrouvez l'unité de la conductivité.

4) On assimile les ions Na^+ et Cl^- à des sphères de rayons a_+ et a_- et on considère la conductivité molaire $\chi = \frac{\sigma}{C}$. Si η est la viscosité du

milieu acqueux, pouvant varier avec la température, montrez que le produit $\chi\,\eta$ reste constant par rapport à la concentration **C** et la température **T**, et s'exprime en fonction de **q**, a_+ et a_-.

Exercice 3 (9 points).

Soit une portion d'axone constituée d'une membrane de forme cylindrique, de rayon **a**, d'épaisseur **b<<a** et de longueur **L** (voir figure 2) entourant un axoplasme..

On rappelle que pour un milieu conducteur de résistivité ρ, de longueur **d**, parcouru par un courant perpendiculaire à une section droite de surface **S**, invariant par translation le long du courant, la résistance est $R=\rho\,\frac{d}{S}$.

1) La membrane est assimilable à un milieu électrolytique de résistivité ρ_m. Pour le courant transversal à cette membrane, montrez que l'expression de la résistance membranaire est $R_m = \rho_m \frac{b}{2\pi a L}$?

2) L'axoplasme est également un milieu électrolytique de résistivité ρ_a. Pour le courant longitudinal le long de l'axone, quelle est l'expression de la résistance axoplasmique R_a en fonction de ρ_a, **a** et **L** ?

3) On appelle longueur critique L_c de l'axone celle pour laquelle $R_m=R_a$. Calculez L_c pour un axone tel que $a=5\mu m$, $b=70A°$, $\rho_m=1{,}6 10^7\ \Omega.m$, $\rho_a=0{,}5\ \Omega.m$.

4) Montrez que si $L > L_c$ alors $R_m < R_a$. Qu'en concluez vous ?

Question de cours (4 points).

Pour un fluide visqueux en mouvement, définissez la notion de perte de charge, de résistance vasculaire, d'équivalence pour des systèmes de conduites en série et en dérivation.

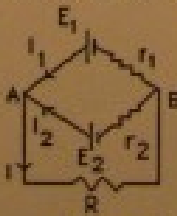


Figure 1

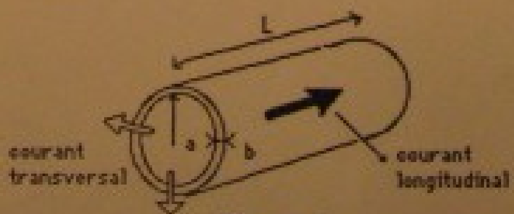


Figure 2

Ex 3 (R4)

1) $R_m = \rho_m \frac{b}{2\pi a l}$

2) $R_a = \rho_a \frac{l}{\pi a^2}$

3) $R_m = R_a \Leftrightarrow \rho_m \frac{b}{2\pi a l_c} = \rho_a \frac{l_c}{\pi a^2}$

$$\to \boxed{l_c^2 = \frac{\rho_m}{2\rho_a} ab}$$ voir AN.

4) $R_m < R_a \qquad \rho_m \frac{b}{2\pi a l} < \rho_a \frac{l}{\pi a^2}$

$$l_c^2 = \frac{\rho_m ab}{2\rho_a} < l^2 \qquad l > l_c$$

Si un courant est produit localement, il va préférentiellement quitter l'axoplasme par la membrane. Impossible de transmettre un signal sur une distance plus grande que l_c. Nécessité de transport actif.

AN : $l_c^2 = \frac{1.6\ 10^7}{2 \times 0.5} \times 5\ 10^{-6} \times 70\ 10^{-10}$

$= 560\ 10^{-9} \to l_c = 7{,}48\ 10^{-4}$ m $\approx 0{,}75$ mm

Exo2 (Ref)

1) $z_+ C_+ + z_- C_- = 0$ $\quad$ $z_+ = 1$, $z_- = -1$ $\rightarrow C_+ = C_- = C$

2) on a $\sigma = C_+ (z_+ q)^2 \frac{D_+}{kT} + C_- (z_- q)^2 \frac{D_-}{kT}$

$C_+ = C_- = C$

$$\boxed{\sigma = \frac{C q^2}{kT} (D_+ + D_-)}$$

3) $C = 10^{-3} \; 6{,}02 \; 10^{23}$ ions / l

$= 10^{-3} \; 6{,}02 \; 10^{23} \; 10^{+3}$ ions / m3

$$\sigma = \frac{6{,}02 \; 10^{23} \times (1{,}6 \; 10^{-19})^2}{1{,}38 \; 10^{-23} \times 300} (1{,}33 + 2{,}03) \; 10^{-9}$$

$$= \frac{6{,}02 \times 2{,}56 \times 3{,}36}{1{,}38 \times 3} \; \frac{10^{23} \; 10^{-38} \; 10^{-9}}{10^{-21}}$$

$[\sigma] = [R]^{-1} \cdot [L]^{-1}$ $\quad = 12{,}5 \; 10^{-3} \; (\Omega . m)^{-1}$ $\quad$ (*) $\leftarrow$ l'unité doit être correctement écrite sinon la formule

4) $\frac{D_+}{kT} = \frac{1}{6 \pi \eta a_+}$ $\qquad$ $\frac{D_-}{kT} = \frac{1}{6 \pi \eta a_-}$

$$\boxed{D = \frac{kT}{6 \pi \eta a}} \qquad \boxed{\mu = \frac{D}{kT}}$$

Donc $\Lambda = \frac{\sigma}{C} = \frac{q^2}{6 \pi \eta} \left(\frac{1}{a_+} + \frac{1}{a_-} \right)$

$$\boxed{\Lambda \eta = \frac{q^2}{6 \pi} \left(\frac{1}{a_+} + \frac{1}{a_-} \right) = \text{cte}} \quad / \, c \text{ et } / \, T$$

(loi de Walden)

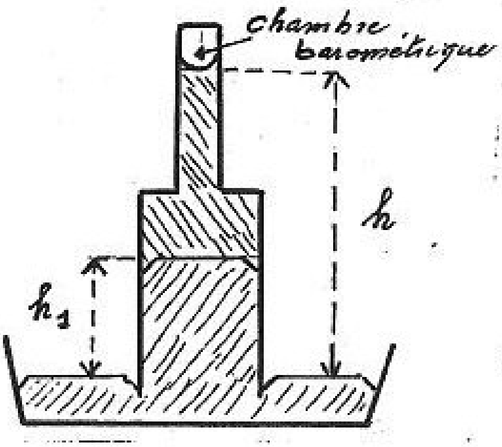
(*) Unité de σ : $[\sigma] = \frac{[j]}{[E]} = \frac{[I]}{[S]} \frac{L}{[R][I]} = [R]^{-1} [L]^{-1}$

unité $(\Omega . m)^{-1}$

DEUG B1 : Travaux Dirigés de Physique

STATIQUE DES FLUIDES

I - ETUDE D'UN BAROMETRE A 2 LIQUIDES



Ce baromètre est représenté sur la figure ci-contre.
Dans le tube de section S, le mercure atteint le niveau h_1 au-dessus du niveau dans la cuvette. Au-dessus du Hg se trouve de la glycérine qui monte dans le tube de section s jusqu'au niveau h (au-dessus de celui de la cuvette). On suppose que la pression éxistant dans la chambre barométrique est négligeable et on désigne par p_0 la pression atmosphérique régnant au niveau de la surface libre du mercure.

1/ Etablir la relation existant entre la pression p_0, les hauteurs h et h_1 et les masses volumiques ρ de la glycérine et ρ_1 du Hg.

Application numérique :

$h_1 = 70$ cm $\qquad \rho_1 = 13{,}6\ 10^3$ Kg/m^3

$h = 102$ cm $\qquad \rho = 1{,}26$ g/cm^3

$g = 9{,}81$ S.I. $\qquad$ Calculer p_0.

2/ On suppose que la pression atmosphérique subit une petite variation Δp. Quel est le déplacement Δh du niveau supérieur de la glycérine ?

On supposera les liquides incompressibles et on posera $\frac{s}{S} = a$.

Application numérique : On observe une élévation du niveau de la glycérine, $\Delta h = 1$ cm.

Quelle est la nouvelle valeur p_1 de la pression atmosphérique, sachant que : $a = 0{,}01$?

3/ On suppose maintenant que l'on dispose d'un baromètre à Hg usuel (un seul liquide - tube de section constante).

Quelle serait la hauteur h' de la colonne de Hg correspondant à la pression p_0 ? Quelle serait la variation de hauteur $\Delta h'$ observée si la pression atmosphérique prenait la valeur p_1 ? Conclusion ?

II - FORCES DE PRESSION

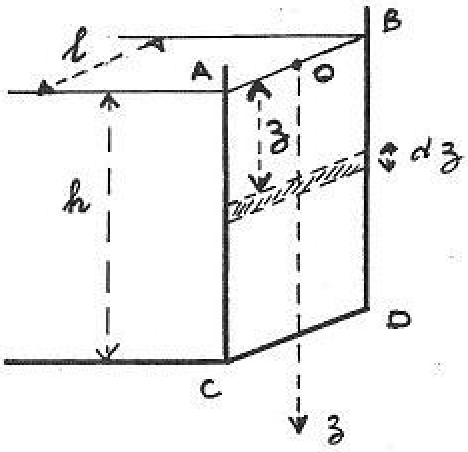
On se propose de calculer la résultante des forces de pression exercées par un liquide sur la paroi du réservoir qui le contient. On suppose que cette paroi est verticale, rectangulaire, de largeur ℓ, et que le niveau AB du liquide est à la hauteur h au-dessus du fond du réservoir.

On désigne par O le milieu de AB et on choisit comme axe Oz, la verticale orientée vers le bas.

a) Calculer, en fonction de la distance z au point O, le module df(z) de la force élémentaire qui s'exerce sur un élément horizontal de paroi de hauteur dz situé à la profondeur z (élément hachuré).

b) Calculer le module F de la résultante de toutes les forces élémentaires. Vérifier l'homogénéité de la formule trouvée.

c) Déterminer le point d'application Q de cette résultante en calculant la distance OQ = H.



d) *Application numérique* :

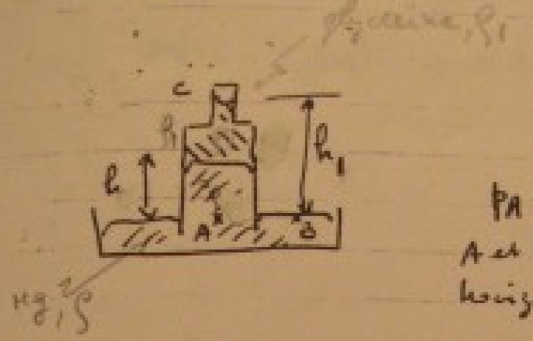
Le liquide est du mercure. Masse volumique du mercure : 13,6 Kg/litre.

ℓ = 10 cm ; h = 30 cm ; g = 9,81 S.I.

La pression atmosphérique p_0 correspond à une hauteur de Hg de 75 cm.

Calculer les valeurs de F et H.

Statique des fluides



$p_A = p_B = p_0$
A et B appartiennent au plan horizontal d'un même liquide en équilibre.

1) $p_A = p_C + \rho g \ell + \rho_1 g (h_1 - \ell)$
$p_A = p_B = p_0$ $\qquad p_C \simeq 0$

$$\boxed{p_0 = \rho g \ell + \rho_1 g (h_1 - \ell)}$$

$1\,Pa = 1\,N/m^2$

AN: $p_0 = 13.6\ 10^3\ kg/m^3 \times 9.81 \times 0{,}70$
$+ 1.26 \cdot 10^3 \times 9.81\ (1{,}02 - 0.70) =$

ρ_1 $1.26\ g/cm^3 = 1.26\ 10^6\ g/m^3 = 1.26\ 10^3\ kg/m^3$
$1\,m^3 = 10^6\,cm^3$

$= 93.39 \cdot 10^3 + 3.95\ 10^3$
$= 97.34\ 10^3\ Pa$
$\simeq 10^5\ Pa$

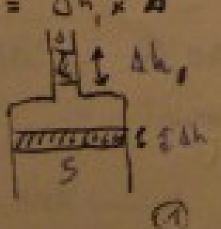
2)

$N/m^2 = p = kg/m^3 \times N/kg \times L$
$= \frac{N\ L}{m^3} = \frac{N}{m^2}$

$\frac{s}{S} = a$

$\Delta p = \rho g \Delta \ell + \rho_1 g (\Delta h_1 - \Delta h)$

$\Delta h \times S = \Delta h_1 \times s$ $\qquad \Rightarrow \Delta p = g(\rho - \rho_1)\Delta \ell + \rho_1 g \Delta h_1$



$= g(\rho - \rho_1)\Delta h_1 \frac{s}{S} + \rho_1 g \Delta h_1$

(1) $\Delta p = \left[(\rho - \rho_1) g \frac{s}{S} + \rho_1 g\right] \Delta h_1$

4) Dans le cas de l'eau, la hauteur du tube serait trop grande $\frac{h_{eau}}{h_{Hg}} = \frac{\rho_{Hg}}{\rho_{eau}} = \frac{13,6}{1} = 13,6$

II Forces de pression

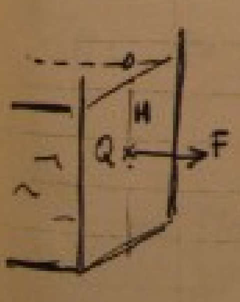
a) $df(z) = p(z)\,dz \times \ell$.

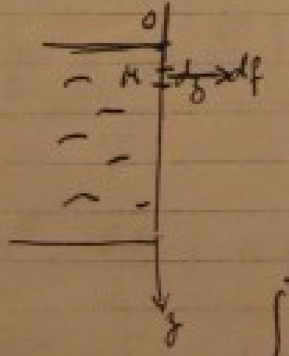
$p(z) = p_0 + \rho g z \rightarrow df(z) = (p_0 + \rho g z)\,dz\,\ell$.

b) $F = \int_0^h df(z) = \int_0^h \ell(p_0 + \rho g z)\,dz$

$= (p_0 h + \rho g \frac{h^2}{2})\ell$

$\cancel{\frac{kg}{m^3}}\ \frac{N}{kg}\ m^2 \times m = N$





c) $\sum_i \vec{OM_i} \wedge \vec{F_i} = \vec{OQ} \wedge \vec{F}$

$\int_0^h z\, df(z) = H \times F$

$\int_0^h z \times \ell(p_0 + \rho g z)\,dz$

$= \ell p_0 \frac{h^2}{2} + \ell \rho g \frac{h^3}{3} = H\,(p_0 h + \rho g \frac{h^2}{2})\ell$

$$H = \frac{p_0 \frac{h}{2} + \rho g \frac{h^2}{3}}{p_0 + \rho g \frac{h}{2}}$$

3

$$F = \left(p_0 h + \rho g \frac{h^2}{2}\right) \ell$$

$$p_0 = \rho g \tilde{h} = 13.6 \cdot 10^3 \,\mathrm{kg/m^3} \times 9.81 \times 0.75\,\mathrm{m}$$

$$\rho = 13.6 \,\mathrm{kg/\ell} = 13.6 \cdot 10^3 \,\mathrm{kg/m^3} \qquad p_0 = 100.06 \, 10^3 \,\mathrm{Pa} \simeq 10^5 \,\mathrm{Pa}$$

$1\,\mathrm{m^3} = 1000\,\ell \qquad 1\,\ell = 1\,\mathrm{dm^3}$

$1\,\mathrm{m} = 10\,\mathrm{dm}.$

$1\,\mathrm{m^3} = 10^3\,\mathrm{dm^3}$

$$F = \left(10^5 \times 0.30 + 13.6 \cdot 10^3 \times 9.81 \times \frac{0.09}{2}\right) \times \underset{\ell}{0.10}$$

$(0.3)^2 = 0.09$

$$F = \left(0.30 \; 10^5 + 6.003 \; 10^3\right) 0.1 = (30 \; 10^3 + 6.00 \; 10^3) \times 0.1 =$$

$$= 3{,}6 \; 10^3 = 3600\,\mathrm{N}$$

$$H = \frac{\left(p_0 \frac{h}{2} + \rho g \frac{h^2}{3}\right) \ell h}{F}$$

$$H = \left(10^5 \times \frac{0.3}{2} + 13.6 \cdot 10^3 \times 9.81 \times \frac{0.09}{3}\right) \times 0.1 \times 0.3$$

$$= (0.15 \; 10^5 + 4.00 \; 10^3) \; 0.03$$

$$= 19 \; 10^3 \times 0.03 = 0.57 \; 10^3 = 570$$

$$H = \frac{570}{3600} = 0.158\,\mathrm{m} = 15{,}8\,\mathrm{cm}.$$

4

Faculté des Sciences de Luminy

D E U G B1
Exercices de Physique

Potentiels membranaires.

Exercice

On dénote par $C_{Na}(in)$, $C_K(in)$ et $C_{Cl}(in)$ les concentrations d'ions Na^+, K^+ et Cl^- à l'intérieur d'une cellule, délimitée par une membrane perméable à ces ions. Celle ci est impermeable à des ions (de charge -q, q>0) dont la concentration intérieure est $C_{np}(in)$. On appelle $C_{Na}(ext)$, $C_K(ext)$ et $C_{Cl}(ext)$ les concentrations des ions Na^+, K^+ et Cl^- dans le milieu extracellulaire.

1-Montrer la relation, pour un équilibre de Donnan de la membrane :

$$\frac{C_K(in)}{C_K(ext)} = \frac{C_{Na}(in)}{C_{Na}(ext)} = \frac{C_{Cl}(ext)}{C_{Cl}(in)}$$

2- Ecrire les relations d'électroneutralité à l'intérieur et à l'extérieur de la cellule faisant intervenir $C_{Na}(ext)$, $C_K(ext)$, $C_{Cl}(ext)$ et $C_{Na}(in)$, $C_K(in)$, $C_{Cl}(in)$, $C_{np}(in)$.

3-Application numérique : $C_K(ext)$=10m.moles/l, $C_{Na}(ext)$=140m.moles/l, $C_{Cl}(ext)$=150m.moles/l, $C_{np}(in)$=125m.moles/l, (m.moles=10^{-3}moles). Déduire de 1- et 2- les valeurs de $C_K(in)$, $C_{Na}(in)$ et $C_{Cl}(in)$. Vérification avec 2-.

4- Donner la valeur de la différence de potentiel d'équilibre de la membrane V_D si T=300°K.

****

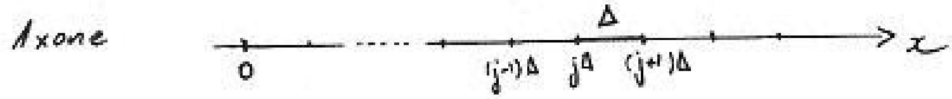
Exercice

La différence de potentiel membranaire d'un axone (relativement à la ddp d'équilibre), vérifie, dans le cas d'une faible stimulation, l'équation (1)

$$\frac{1}{2\pi\, a\, R_a}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - g_M^0 v = C_M \frac{\partial v}{\partial t} \qquad (1)$$

où $v = v(x,t)$, a est le rayon de l'axoplasme, R_a la résistance de l'axoplasme par unité de longueur, g_M^0 la conductance transmembranaire par unité de surface et C_M la capacitance transmembranaire par unité de surface.

On prend une partition de l'axone en segments de longueur Δ (petite) et on note $v_j(t) = v(j\Delta,t)$.



Si Δ est suffisamment petit :

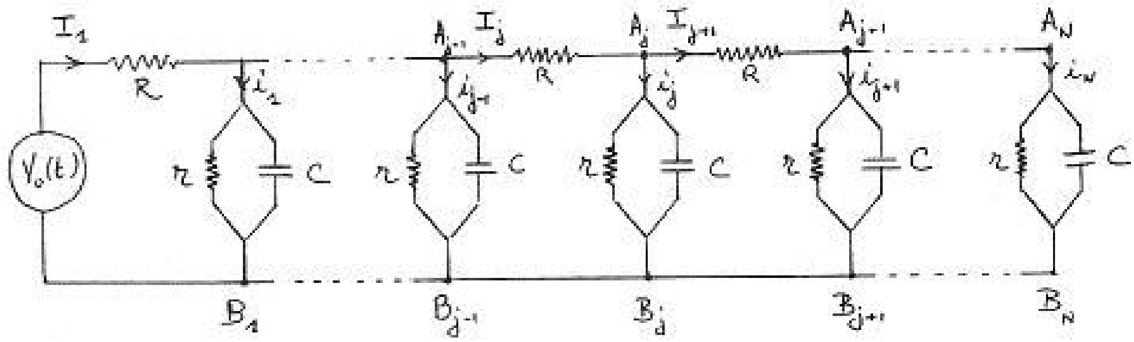
$$\frac{\partial v}{\partial x}(j\Delta,t) \equiv \frac{1}{\Delta}\left(v(j\Delta+\frac{\Delta}{2},t)-v(j\Delta-\frac{\Delta}{2},t)\right) \; ; \; \frac{\partial^2 v}{\partial^2 x}(j\Delta,t) \equiv \frac{1}{\Delta^2}\left(v_{j+1}(t)-2v_j(t)+v_{j-1}(t)\right)$$

L'équation initiale (1) est approximée par :

$$\frac{1}{2\pi a R_a \Delta^2}(v_{j+1}-2v_j+v_{j-1}) - g_M^0 v_j = C_M \frac{\partial v_j}{\partial t} \qquad (2)$$

(où on a omis d'écrire la dépendance en temps t)

Il est possible de retrouver cette relation (2) avec la méthode utilisée dans l'exercice 9 (du TD n°3), en remplaçant la résistance r par cette même résistance r en dérivation sur un condensateur de capacitance C. La chaîne cellulaire est alors un modèle d'axone où une stimulation est appliquée en bout de chaîne. Le schéma est alors :



1) Avec les mêmes notations que dans l'exercice 9, donnez la relation entre v_{j+1}, v_j, v_{j-1}, $\frac{\partial v_j}{\partial t}$, R, r et C. (Il suffit de connaître le courant i_j dans la branche A_jB_j)

2) Quelle est l'expression de R, r et C en fonction de R_a, a, g_M^0, C_M et Δ? Vérifiez l'homogénéité des formules.

3) Montrez que les solutions pour v_j sont de la forme $v_j(t) = \frac{V_0}{2}(e^{-\alpha j + i\omega t} + \text{c.c.})$ dans le cas où la ddp appliquée $V_0(t)$ est périodique, de pulsation ω telle que $V_0(t) = V_0 \cos\omega t$. (c.c. désigne la quantité complexe conjuguée).

Donnez α en fonction de R, r, C et ω. Y a-t-il propagation?

Réponse : 1) Pour chaque type d'ion de charge $z_i q$ ($z_i = \pm 1$), on a, à l'équilibre de Donnan,

$$V_D = (V_{int} - V_{ext})_{\text{equilibre}} = -\frac{kT}{z_i q} \log \frac{C_i(int)}{C_i(ext)}$$
$$= V_i^N$$

où V_i^N est le potentiel de Nernst de l'ion i. Tous les potentiels de Nernst sont égaux entre eux. Leur valeur est appelée V_D.

α) Pour K^+ $z = +1$, $\log \frac{C_K(in)}{C_K(ext)} = -\frac{qV_D}{kT}$

β) " Na^+ " $\log \frac{C_{Na}(in)}{C_{Na}(ext)} = \frac{-qV_D}{kT}$

γ) " Cl^- $z = -1$ $\log \frac{C_{Cl}(in)}{C_{Cl}(ext)} = \frac{+qV_D}{kT}$

D'où la relation 1)

2) Electroneutralité

a) $C_K(ext) + C_{Na}(ext) = C_{Cl}(ext)$

b) $C_K(in) + C_{Na}(in) = C_{Cl}(in) + C_{np}$

3) De 1) on a

$$\frac{C_K(in)}{10\ 10^{-3}} = \frac{C_{Na}(in)}{140\ 10^{-3}} = \frac{150\ 10^{-3}}{C_{Cl}(in)}$$

De 2) b) $C_K(in) + 14\, C_K(in) = \frac{1500\ 10^{-6}}{C_K(in)} + 125\ 10^{-3}$

$= 15\, C_K(in)$

D'où, en resolvant en $C_K(in)$ (eq. 2nd degré)

$$15\left(C_K(in)\right)^2 - 125\ 10^{-3}\ C_K(in) - 1{,}5\ 10^{-3} = 0$$

$$\Delta = (125)^2\ 10^{-6} + (4)(15)\ 1{,}5\ 10^{-3}$$
$$= 15{,}625\ 10^{-3} + 90\ 10^{-3} = 105{,}625\ 10^{-3}$$
$$= 1056{,}25\ 10^{-4} \qquad \sqrt{\Delta} = 32{,}5\ 10^{-2}$$ 1 seule racine réelle

$$C_K(in) = \frac{125\ 10^{-3} + 325\ 10^{-3}}{2 \times 15} = 15 \cdot 10^{-3}$$
$$= 15 \text{ m.mole/l}$$

$$C_{Na}(in) = 14\ C_K(in) = 210\ 10^{-3} = 210 \text{ m.mole/l}$$

$$C_{Cl}(in) = \frac{1500\ 10^{-6}}{C_K(in)} = \frac{1{,}5\ 10^{-3}}{15\ 10^{-3}} = 0{,}1 = 100\ 10^{-3}$$
$$= 100 \text{ m.mole/l} \quad (*)$$

4) de 1) α) (ou β) ou γ))

$$\frac{-qV_D}{kT} = \log \frac{C_K(in)}{C_K(ext)} = \log \frac{15}{10} = \log 1{,}5 = 0{,}405$$

$$V_D = -\frac{0{,}405 \times k \times T}{q} = \frac{-0{,}405 \times 1{,}38\ 10^{-23} \times 300}{1{,}6 \cdot 10^{-19}}$$
$$= -1{,}048\ 10^{-4}\ V$$
$$V_D = -10{,}48 \text{ mV}$$

—— N ——

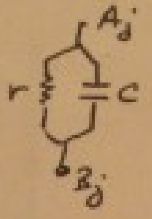
* vérification avec 3) $\quad 15 + 210 = 100 + 125$ en m.mole/l

$$C_K(in) + C_{Na}(in) = C_{Cl}(in) + C_{Np}$$

On a aussi
$$C_K(ext) + C_{Na}(ext) = C_{Cl}(ext) \quad \text{i.e.} \quad 10 + 140 = 150$$ en m.mole/l

Ex : 1) le courant dans la branche $A_j B_j$ est

$$i_j = C\frac{\partial v_j}{dt} + \frac{v_j}{r}$$



$v_j = V_{A_j} - V_{B_j}$

Avec résultat de l'exercice 9

$$v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1} = R i_j$$
$$= R\left(C\frac{\partial v_j}{\partial t} + \frac{v_j}{r}\right)$$

2) On a l'identification

$R = 2\pi a R_a$, $\frac{1}{r} = g_M^0 \Delta^2$, $C = C_M \Delta^2$

Formules homogènes.

3) Solutions élémentaires sous la forme

$$v_j(t) = \frac{V_0}{2} e^{-\alpha j + i\omega t}$$

$$\frac{V_0}{2R}\left(e^{-\alpha(j+1)} - 2e^{-\alpha j} + e^{-\alpha(j-1)}\right)e^{i\omega t} - \frac{V_0}{2r} e^{-\alpha j + i\omega t} = i\omega \frac{C V_0}{2} e^{-\alpha j + i\omega t}$$

D'où v_j est solution si α vérifie

$$\frac{1}{R}\left(e^{-\alpha} - 2 + e^{\alpha}\right) - \frac{1}{r} = i\omega C$$

c.a.d $2\operatorname{ch}\alpha - 2 = i\omega RC + \frac{R}{r}$ d'où $\operatorname{ch}\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r} + 2 + i\omega RC\right)$

La quantité complexe conjuguée vérifie également l'équation.
α est complexe, donc il y a amortissement. Il en est de même de la quantité conjuguée. Donc il ne peut y avoir propagation

On doit avoir $v_0(t) = V_0(t) = \frac{V_0}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) = V_0 \cos\omega t$
pour $j = 0$ D'où la forme des solutions.

— ~ —

Si on trouve α tel que $v_j(t)$ est solution, $v_j^*(t)$ sera également solution. La solution générale est la somme $\frac{v_j + v_j^*}{2}$ car pour $j = 0$ elle vaut const

EXERCICE . CHAINES CELLULAIRES

Soit le réseau suivant (voir figure 1) constitué de N éléments identiques à l'aide de résistances R et r, alimenté par une source de tension $V_0(t)$.

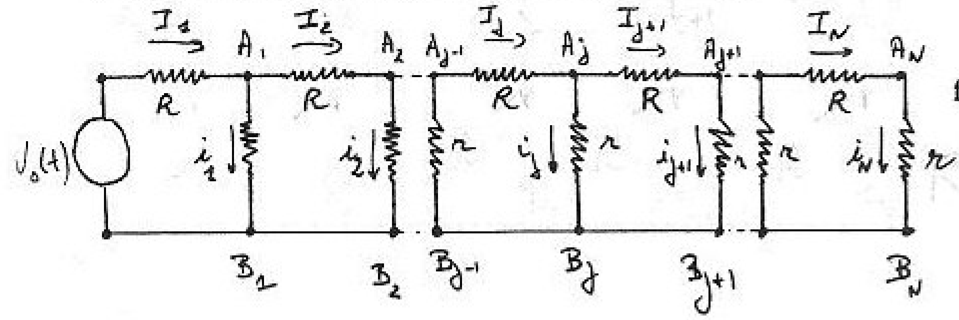


figure 1

le courant dans la branche A_jA_{j+1} est noté I_{j+1}

le courant dans la branche A_jB_j est noté i_j

le potentiel en A_j est noté V_{Aj} , le potentiel en B_j est noté V_{Bj}

la différence de potentiel (ddp) entre A_j et B_j est notée v_j ($v_j = V_{Aj} - V_{Bj}$)

1) Exprimez la loi des nœuds en A_j, la loi d'Ohm entre A_{j+1} et A_j, entre A_j et A_{j-1}.

2) Utilisez la loi d'Ohm entre A_{j+1} et A_j et le fait que tous les points B_j sont au même potentiel ($V_{Bj} = V_{Bj+1}$) pour donner une relation entre v_{j+1}, v_j, v_{j-1}, R et r ($v_0 = V_0$).

3) On cherche les solutions de cette équation sous la forme $v_j(t) = V_0(t)\, e^{-\alpha j}$. Montrez que les solutions ont bien cette forme et donnez α en fonction de R et v. Que vaut α si $R/r << 1$.

4) Représentez $v_j(t)$ à un instant t en fonction de j. Pour quelle valeur de j, l'amplitude de $v_j(t)$ est égale à $V_0(t)/e$?

5) On considère une chaîne de cellules connectées électriquement entre elles et possédant une résistance membranaire (figure 2).

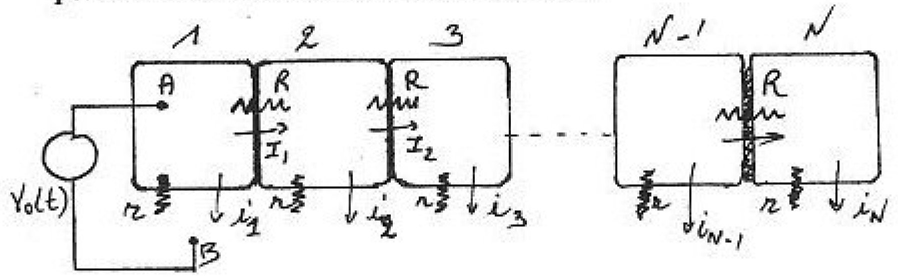


figure 2

Une ddp est maintenue entre l'intérieur de la cellule 1 et le milieu fluide extra-cellulaire, l'électrode A est plongée dans la cellule 1, l'électrode B dans le milieu, le milieu extérieur de toutes les cellules est identique. La résistance de jonction intercellulaire est R, la résistance membranaire de chaque cellule est r. On mesure une ddp, $v_j(t)$, entre la cellule j et le milieu extérieur. Les résultats sont reportés sur la courbe v(x) ci-dessous (figure 3).

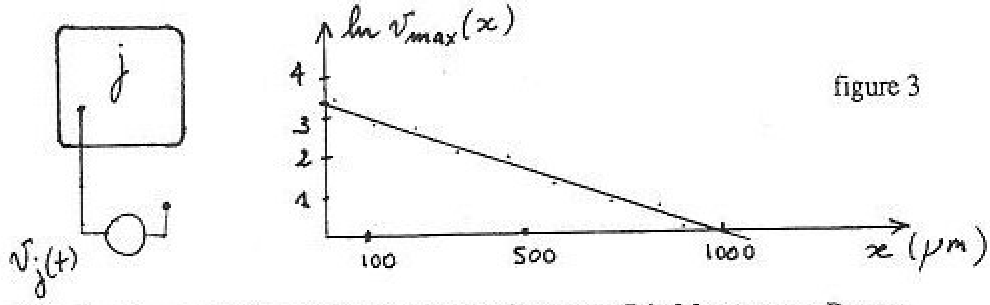


figure 3

La taille de chaque cellule est 10 μm. Estimez le rapport R/r. Montrez que R << r.

a) On a $I_j - I_{j+1} - i_j = 0$ ①

Soit $V_j = V_{A_j}$ On a

$V_{j+1} - V_j = -R I_{j+1}$

$V_j - V_{j-1} = -R I_j$

b) En fonction de $v_j = V_{A_j} - V_{B_j}$ Avec $V_{B_j} = V_{B_{j+1}}$

$$v_{j+1} + \cancel{V_{B_{j+1}}} - (v_j + \cancel{V_{B_j}}) = -R I_{j+1}$$

$$v_j + \cancel{V_{B_j}} - (v_{j-1} + \cancel{V_{B_{j-1}}}) = -R I_j$$

En faisant la différence

$$v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1} = -R(-I_j + I_{j+1}) = R i_j \quad \text{d'après ①}$$

Comme $v_j = V_{A_j} - V_{B_j} = r i_j$ On obtient

$$v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1} = \frac{R}{r} v_j \qquad v_0 = V_0$$

$j = 1, 2 \ldots N-1$ $\quad v_0(t) = V_0(t)$

c) Solution sous la forme

$$v_j = V_0 e^{-\alpha j}$$

la ddp décroît avec la distance.

$$\Rightarrow V_0 \left(e^{-\alpha(j+1)} - 2e^{-\alpha j} + e^{-\alpha(j-1)}\right) = \frac{R}{r} e^{-\alpha j} V_0$$

D'où $e^{\alpha} + e^{-\alpha} - 2 = \frac{R}{r}$.

$$2\,ch\alpha = \frac{R}{r} + 2 \qquad ch\alpha = 1 + \frac{R}{2r} \quad ②$$

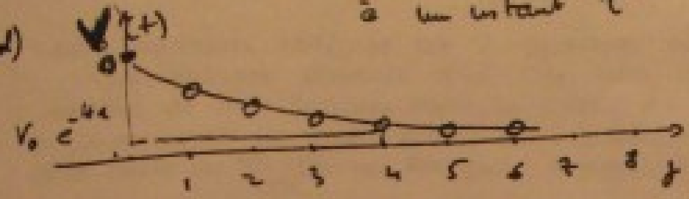
Rep 1

Si $\frac{R}{R+r} \ll 1$, d'après (2), $\operatorname{ch} \alpha \simeq 1$ et donc $\alpha \simeq 0$.
$\operatorname{ch} \alpha$ est bien approximé par $\operatorname{ch} \alpha \simeq 1 + \frac{\alpha^2}{2}$. D'où

$$\alpha = \sqrt{\frac{R}{r}}$$

à un instant t

d)



Si $j = [\frac{1}{\alpha}]$

où $[a]$ = partie entière de a
de α

alors $V_0(t) e^{-j\alpha} \simeq \frac{V_0(t)}{e}$ Donc $j \simeq [\sqrt{\frac{r}{R}}]$

e) $\ln V_{max}(j) = \ln(V_{0max} e^{-\alpha j})$

$= \ln(V_{0max}) - \alpha j$

Sur une distance de 1mm = 1000μ, si chaque cellule occupe 10μ, on a $\frac{1000\mu}{10\mu}$ valeurs possibles de j

$j_{max} = 100$

D'où α = pente de la courbe $\simeq \frac{3.4}{100} = \operatorname{tg} \beta = \sqrt{\frac{R}{r}} = 0.034$
$= 3.4\ 10^{-2}$

On a donc $R \ll r$. $\frac{R}{r} \simeq 11.5\ 10^{-4}$

Rep 2

Faculté des Sciences de Luminy
DEUG B1

Année 1995-96

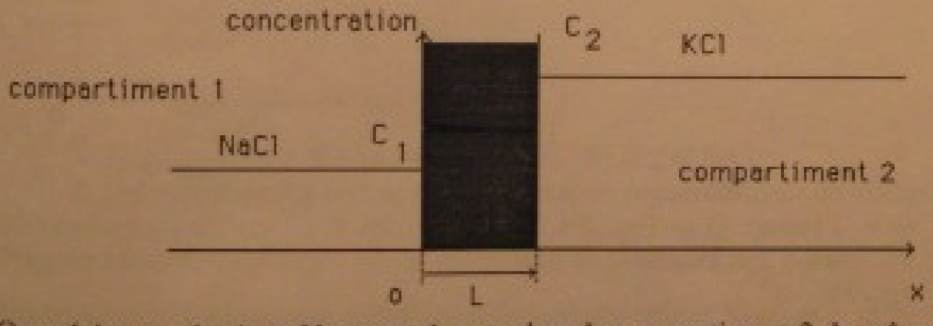
Session de Juin
Epreuve de Physique

Les candidats rédigent les 3 questions sur 3 copies séparées.
Ils peuvent disposer d'un formulaire personnel manuscrit constitué de trois feuillets recto au format A4 (feuilles quadrillées à petits carreaux). On pourra utiliser des calculatrices non programmables. Note finale sur 20 :Travaux Pratiques : 6 points, Test :14 points.

Problème 1 (7 points/20) : **Potentiel de jonction**

Une membrane poreuse d'épaisseur L sépare deux compartiments, l'un contenant une solution de NaCl de concentration C_1 et l'autre une solution de KCl de concentration $C_2 > C_1$(voir figure). Les concentrations des ions Na^+ et des ions K^+ dans la membrane ($0 \leq x \leq L$) dépendent de l'abscisse du point où on les mesure de la façon suivante:

$$C_{Na^+} = C_1 \left(1 - \frac{x}{L}\right) \qquad C_{K^+} = C_2 \frac{x}{L}$$



On précise que les ions Na^+ sont absents dans le compartiment 2 de même que les ions K^+ dans le compartiment 1.

1- Déduire de la règle d'électroneutralité l'expression de la concentration en ions Cl^- en fonction de l'abcisse x dans le membrane.

2- Montrer que, dans l'état stationnaire (où aucun courant électrique ne traverse la jonction), l'on a :

$$j_{K^+} + j_{Na^+} - j_{Cl^-} = 0$$

où j_i est la densité de courant du porteur i.

3- Soit

$$j_i = -\mu_i\left(kT \frac{dC_i}{dx} + z_i\, q\, C_i \frac{dV}{dx}\right)$$

la densité de courant du porteur i donné par la loi de Nernst-Planck-Fick où μ_i, z_i, $C_i = C_i(x)$ sont la mobilité, la valence et la concentration de l'ion i, où k est la constante de Boltzmann, T la température, q>0 la charge élémentaire et V(x) le potentiel régnant en un point de la jonction d'abscisse x.

Déduire de 2- une équation différentielle pour V(x) de la forme :

$$\text{(E)} \qquad (ax+b)\frac{dV}{dx} = d$$

où a,b,d sont des constantes que l'on déterminera en fonction des mobilités ainsi que de k, T, q, C_1, C_2 et L.

4- Intégrer l'équation (E) entre x=0 et x=L et en déduire l'expression de la différence de potentiel $\Delta V = V_2 - V_1$ de part et d'autre de la jonction en fonction des données.

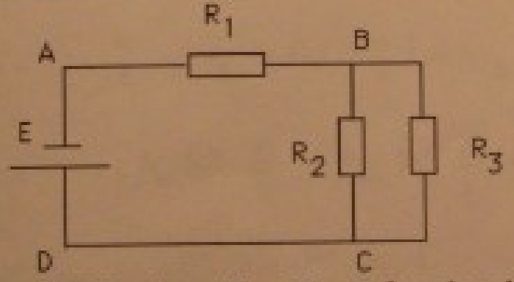
5- Application numérique. Calculer ΔV avec:

$k = 1,38.\ 10^{-23}$ J/K $\quad \frac{\mu_{K^+}}{\mu_{Cl^-}} = 0,965 \quad \frac{\mu_{Na^+}}{\mu_{Cl^-}} = 0,658 \quad \frac{C_2}{C_1} = 15 \quad T=300K$

$q = 1.6\ 10^{-19}$Cb

****

Problème 2 (7 points/20) : Soit le circuit suivant :



1- Exprimer $V_C - V_B$ en fonction de E, R_1, R_2 et R_3 .

2- On remplace R_3 par un condensateur de capacitance C, de charge q(t) telle que q(t) = 0 pour $t \leq 0$, q(t) > 0 pour t > 0, $q(t) \to Q$ quand $t \to \infty$. On désignera par $V_c(t) = V_C - V_B$, la différence de potentiel aux bornes du condensateur. Trouver une équation différentielle reliant $V_c(t)$ et $\frac{dV_c(t)}{dt}$.

3- Soit $V_c(t) = A \exp(-t/\tau) + B$ la solution générale de l'équation différentielle trouvée en 2-.En utilisant les conditions aux limites sur q(t), exprimer A et B en fonction de Q et C. Exprimer Q et τ en fonction de E, R_1, R_2 et C pour que $V_c(t)$ soit solution de l'équation différentielle. Montrer que τ est homogène à un temps.

4- Tracer $V_c(t)$ en fonction de t pour τ=500 s et B=2,5Volts.

****

Question de cours(6 points/20) : Etablir la loi de conservation de Bernouilli pour des fluides non visqueux incompressibles en mouvement stationnaire. Donner deux applications de cette loi.

Rép. 1. 1) $c_{Cl^-}(x) = c_{Na^+}(x) + c_{K^+}(x) = c_1\left(1-\frac{x}{\ell}\right) + c_2\frac{x}{\ell}$

3) $j_{K^+} = -\mu_K\left(kT\frac{dc_K}{dx} + q\,c_K\frac{dV}{dx}\right)$ 2) $j_e = \sum_i z_i q\, j_i = 0$

$j_{Na^+} = -\mu_{Na}\left(kT\frac{dc_{Na}}{dx} + q\,c_{Na}\frac{dV}{dx}\right)$ électrique $= q(j_{K^+} + j_{Na^+} - j_{Cl^-})$

$j_{Cl^-} = -\mu_{Cl^-}\left(kT\frac{dc_{Cl}}{dx} - q\,c_{Cl}\frac{dV}{dx}\right)$

$\mu = \frac{D}{kT}$

Ici, on $\frac{dc_{K^+}}{dx} = \frac{c_2}{\ell}$, $\frac{dc_{Na}}{dx} = -\frac{c_1}{\ell}$ $\frac{dc_{Cl}}{dx} = \frac{c_2-c_1}{\ell}$

$$-\mu_K\left(kT\frac{c_2}{\ell} + q\,c_2\frac{x}{\ell}\frac{dV}{dx}\right) - \mu_{Na}\left(kT\frac{c_1}{\ell} + q\,c_1\left(1-\frac{x}{\ell}\right)\frac{dV}{dx}\right)$$

$$+\mu_{Cl}\left(kT\frac{(c_2-c_1)}{\ell} - q\left(c_1\left(1-\frac{x}{\ell}\right) + c_2\frac{x}{\ell}\right)\frac{dV}{dx}\right) = 0$$

$$\to \frac{dV}{dx}\left[-\mu_K q\,c_2\frac{x}{\ell} - \mu_{Na}q\,c_1\left(1-\frac{x}{\ell}\right) - \mu_{Cl}q\left(c_1\left(1-\frac{x}{\ell}\right) + c_2\frac{x}{\ell}\right)\right]$$

$$= +\mu_K kT\frac{c_2}{\ell} - \mu_{Na}kT\frac{c_1}{\ell} - \mu_{Cl}kT\left(\frac{c_2-c_1}{\ell}\right)$$

Ici, en multipliant par ℓ

$a = -\mu_K q\,c_2 + \mu_{Na}q\,c_1 - \mu_{Cl}q\,(c_2-c_1)$

$b = -\mu_{Na}q\,c_1\ell - \mu_{Cl}q\,c_1\ell$

$c = kT\left(\mu_K c_2 - \mu_{Na}c_1 - \mu_{Cl}(c_2-c_1)\right)$

4) $\int_1^2 dV = c\int_1^2 \frac{dx}{ax+b} = \frac{c}{a}\ln(ax+b)\Big|_{x=0}^{x=\ell}$ $ax+b=u$, $du = a\,dx$

$= \frac{c}{a}\ln\left(\frac{a\ell+b}{b}\right) =$ $a\ell+b = -\mu_K q\,c_2\ell - \mu_{Cl}q\,c_2\ell$

$$= \frac{kT\left[(\mu_K-\mu_{Cl})c_2 + (\mu_{Cl}-\mu_{Na})c_1\right]}{-q\left[(\mu_K+\mu_{Cl})c_2 - (\mu_{Cl}+\mu_{Na})c_1\right]}\ln\left(\frac{(-\mu_K+\mu_{Cl})q\,c_2\ell}{(-\mu_{Na}-\mu_{Cl})q\,c_1\ell}\right)$$

$$\Delta V = -\frac{kT}{q}\left[\frac{(\mu_K-\mu_{Cl})c_2-(\mu_{Na}-\mu_{Cl})c_1}{(\mu_K+\mu_{Cl})c_2-(\mu_{Cl}+\mu_{Na})c_1}\right]\ln\left(\frac{\mu_K+\mu_{Cl}}{\mu_{Na}+\mu_{Cl}}\times\frac{c_2}{c_1}\right)$$

Formule d'Henderson

5) A.N. calcule ΔV pour $T = 300\,°K$, $c_2 = 15\,c_1$

avec $\frac{\mu_K}{\mu_{Cl}} = \frac{7{,}62}{7{,}90} = \alpha$ et $\frac{\mu_{Na}}{\mu_{Cl}} = \frac{5{,}20}{7{,}90} = \beta$ $\quad k = 1{,}38\,10^{-23}\,J/°K$, $T = 300\,°C$

$$\Delta V = -\frac{kT}{q}\left[\frac{\mu_{Cl}(\alpha-1)\,15\,c_1-\mu_{Cl}(\beta-1)\,c_1}{\mu_{Cl}(\alpha+1)\,15\,c_1-\mu_{Cl}(\beta+1)\,c_1}\right]\ln\left(\frac{1+\alpha}{1+\beta}\times 15\right)$$

$$\Delta V = -\frac{kT}{q}\left(\frac{15(\alpha-1)-(\beta-1)}{(\alpha+1)-(\beta+1)}\right)\ln\left(\frac{1+\alpha}{1+\beta}\times 15\right)$$

$\alpha = 0{,}965$
$\beta = 0{,}658$

$\Delta V = 0{,}49\,mV$

—N—

(5

Problème 2 : Rep.

1) R : résistance équivalente à R_2 et R_3 en //.

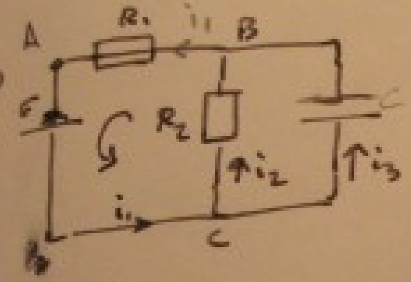
$$R = \frac{R_2R_3}{R_2+R_3}$$

$E = (R_1+R)\,i$ $\quad$ i circulant dans R_1

$$i = \frac{E}{R_1+R} \qquad V_C - V_B = Ri = \frac{RE}{R_1+R} = \frac{R_2R_3E}{(R_2+R_3)\left(R_1+\frac{R_2R_3}{R_2+R_3}\right)}$$

$$= \frac{R_2R_3E}{R_1(R_2+R_3)+R_2R_3}$$

2)



$$v_C = \frac{q}{C} = R_2 i_2 \qquad i_3 = C\frac{dv_C}{dt}$$

$$-E + \frac{q}{C} + R_1 i_1 = 0 \qquad i_1 = i_2 + i_3 = \frac{q}{R_2C} + C\frac{dv_C}{dt}$$

$$\rightarrow -E + \frac{q}{C} + R_1\left(\frac{q}{R_2C} + C\frac{dv_C}{dt}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{q}{C}\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right) + R_1C\frac{dv_C}{dt} = E = v_C\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right) + R_1C\frac{dv_C}{dt}$$

Soit $\tau = \dfrac{R_1C}{1+\frac{R_1}{R_2}}$

Sol. particulière $\quad \dfrac{B}{\tau} = \dfrac{E}{R_1C}$

Sol générale

$$v_C(t) = A e^{-t/\tau} + B = \frac{ER_2}{R_1+R_2}\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$

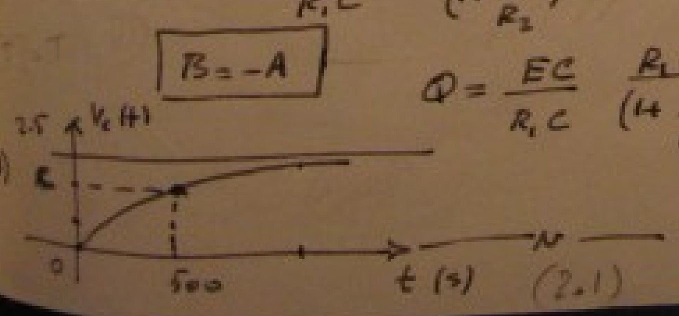
$$t=0 \quad v_C = 0 = \frac{q(t=0)}{C} \qquad A + \frac{E\tau}{R_1C} = 0$$

3) $v_C(t) = \dfrac{E\tau}{R_1C}\left(1-e^{-t/\tau}\right)$ $\qquad t\to\infty \quad v_C(\infty) = \dfrac{Q}{C} = \dfrac{E\tau}{R_1C}$

D'où $A = -\dfrac{E\tau}{R_1C} = -\dfrac{ER_1C}{\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)R_1C} = \boxed{-\dfrac{ER_2}{R_1+R_2} = A}$

$\boxed{B = -A}$ $\qquad Q = \dfrac{EC}{R_1C}\,\dfrac{R_1C}{\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)} = \boxed{\dfrac{ECR_2}{R_1+R_2} = Q}$

4)



$0B = 2.5\times\left(1-\frac{1}{e}\right)$

$\simeq 0.63 \times 2.5 = 1.575$

5) Soit $v_C(t) = A e^{-t/\tau} + B$ la solution de

$$E = v_C\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) + R_1 C \frac{dv_C}{dt}$$

a) Exprimez A et B en fonction de Q et C

Sachant que $q(t) \to Q$ $t \to \infty$

$q(t) = 0$ $t = 0$ $q(0) = 0$

a) $q(0) = A + B = 0$ $A = -B$ $v_C = \frac{Q}{C}$

$v_C(\infty) = \frac{Q}{C} = B$ D'où $A = -\frac{Q}{C}$, $B = \frac{Q}{C}$ $\boxed{v_C(t) = \frac{Q}{C}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$

b) Exprimez Q et τ en fonction de E, R_1, R_2 et C.

Substitution

$$E = \frac{Q}{C}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) + R_1 C \frac{Q}{C} \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$$

Nécessairement :

$$\frac{\cancel{Q}}{\cancel{C}}\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) = R_1 C \frac{\cancel{Q}}{\cancel{C}} \frac{1}{\tau}$$

$$\boxed{\tau = R_1 C \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}}}$$

et $E = \frac{Q}{C}\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)$

$$\boxed{Q = \frac{CE}{1 + \frac{R_1}{R_2}}}$$

$[\tau] = [R_1 C]$

$U = RI$

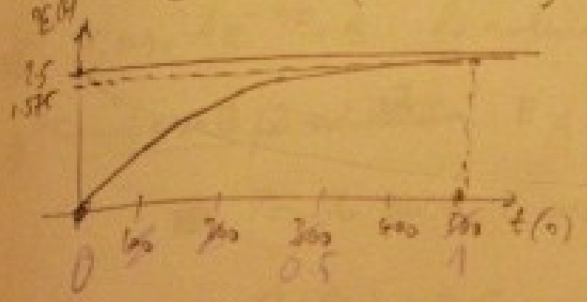
$Q = CV = [C][R][I] = [I][T]$

$I = \frac{dQ}{dt}$ $[C] = \frac{[T]}{[R]} \Rightarrow [RC] = [T]$

(7.2)

b) $\tau = 500\,s$ $\quad B = 2.5$ Volts $\qquad B = 2.5$ volts $= \frac{Q}{C}$

$$V_C(t) = 2.5\left(1 - e^{-t/500}\right)$$



$$t = 500\,s: \quad e^{-\frac{500}{500}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$V_C(500) = 2.5\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

$$= 0.63 \times 2.5 = 1.575 \text{ volts}$$

— // —

Faculté des Sciences de Luminy

DEUG SV1

Année 1997-98

Physique et Applications en Biologie

Test de Juin

Les étudiants(es) peuvent disposer d'un formulaire personnel manuscrit constitué de 3 feuillets recto, au format A4, à petits carreaux. Les calculatrices non programmables sont autorisées.

Les exercices 1 et 2 sont rédigés ensemble sur une feuille de copie.

L'exercice 3 est rédigé sur une feuille de copie différente.

Barême : Travaux Pratiques : 6 points, Rapport : 3 points, Test : 11 points.

1. Résistivité de l'axosplasme. (3 points)

1) A l'intérieur de l'axoplasme d'un axone typique de mammifère, les concentrations des ions Na^+, K^+ et Cl^- sont $C_{Na^+} = 12 moles.m^{-3}, C_{K^+} = 155 moles.m^{-3}, C_{Cl^-} = 4 moles.m^{-3}$. On ne considère pas les autres ions éventuellement présents qui ont une mobilité faible. La mobilité μ de chaque ion est calculée à l'aide de $\mu = \frac{D}{kT}$, où T est la température ($T = 300K$), k est la constante de Boltzmann ($k = 1,38\ 10^{-23} J.K^{-1}$)et D le coefficient de diffusion de l'ion.

Donnez l'expression de la conductivité σ du milieu électrolytique axoplasmique en fonction des concentrations, des mobilités des ions présents et de $q = 1,6\ 10^{-19} Cb$, la charge élémentaire.

2) En déduire la résistivité de l'axoplasme. A.N : Nombre d'Avogadro, $N = 6,023\ 10^{23}$, $D_{Na^+} = 1,33\ 10^{-9} m^2.s^{-1}$, $D_{K^+} = 1,95 m^2.s^{-1}$, $D_{Cl^-} = 2,03 m^2.s^{-1}$

10^{-9} 10^{-9}

2. Mesure de pression. (3 points)

Soit un récipient contenant de la glycérine, de l'huile et de l'air (voir figure 1). Le manomètre A indique la pression p_A qui est constante dans tout le volume d'air. Le tube extérieur est rempli de glycérine et le point B dans ce tube est au contact de l'air extérieur, à la pression atmosphérique $p_{atm} = 1,013\ 10^5 Pa$.

1) Justifier le fait que $p_C = p_E$.

2) Calculer p_E en fonction de p_B et des hauteurs mentionnées.

3) Calculer p_A en fonction de p_B, des hauteurs et des masses volumiques de l'huile ($0,832 kg.l^{-1}$) et de la glycérine ($1,258 kg.l^{-1}$).

3. Potentiel de diffusion. (5 points)

Soit une solution de $NaCl$ présentant une variation de concentration (voir figure 2a) dans laquelle aucun champ électrique est appliqué. Les ions Na^+ et Cl^- vont diffuser de la région de forte concentration vers celle de faible concentration avec des mobilités μ_{Na^+} et μ_{Cl^-} différentes ($\mu_{Na^+} < \mu_{Cl^-}$).

Les concentrations sont représentées, avant uniformisation (figure 2b). On peut alors mesurer une différence de potentiel entre les régions 2 et 1, appelée potentiel de diffusion, en fonction de C_1 et C_2.

1) Soit la densité de charge électrique $\delta(x) = q(C_{Na^+}(x) - C_{Cl^-}(x))$. Expliquez qualitativement pourquoi $\delta(x)$ a la forme indiquée sur la figure 2c (en particulier, aux points M, N et P).

2) Ceci implique l'existence d'un champ électrique $E = -\frac{dV}{dx}$. Indiquez pourquoi ce champ est dirigé dans le sens $x > 0$.

3) Ce champ accélère les ions Na^+, qui ont une mobilité faible et freine les ions Cl^- qui ont une mobilité plus grande. Le courant total, de densité $j_e = q(j_+ - j_-)$ peut ainsi s'annuler. Soient

$$j_+ = \mu_{Na^+}(kT\frac{dC_{Na^+}}{dx} + qC_{Na^+}\frac{dV}{dx})$$

$$j_- = \mu_{Cl^-}(kT\frac{dC_{Cl^-}}{dx} - qC_{Cl^-}\frac{dV}{dx})$$

les densités de courants d'électrodiffusion des ions Na^+ et Cl^-. On admet que $C_{Na^+}(x) \approx C_{Cl^-}(x) = C(x)$ dans le calcul.

Montrez que la condition $j_+ = j_-$ permet d'obtenir une équation de la forme $\frac{dV}{dx} = a\frac{1}{C(x)}\frac{dC}{dx}$

Donnez a en fonction de k, T, q, μ_{Na^+} et μ_{Cl^-}.

4) Intégrez cette équation pour en déduire le potentiel de diffusion ΔV en fonction de a et du rapport $\frac{C_2}{C_1}$.

5) A.N : $\frac{C_2}{C_1} = 0,1$. $T = 300K$. De plus, μ_{Na^+} et μ_{Cl^-} peuvent être obtenues à partir de l'exercice 1. Calculez ΔV.

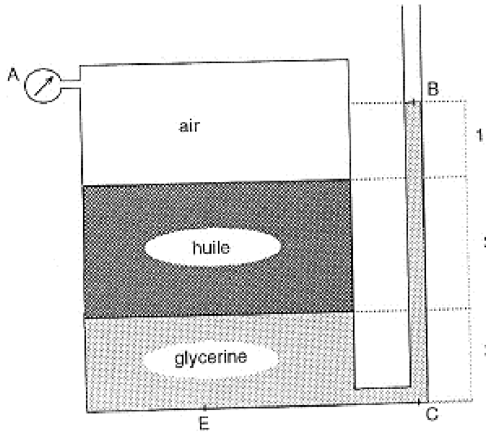


figure 1

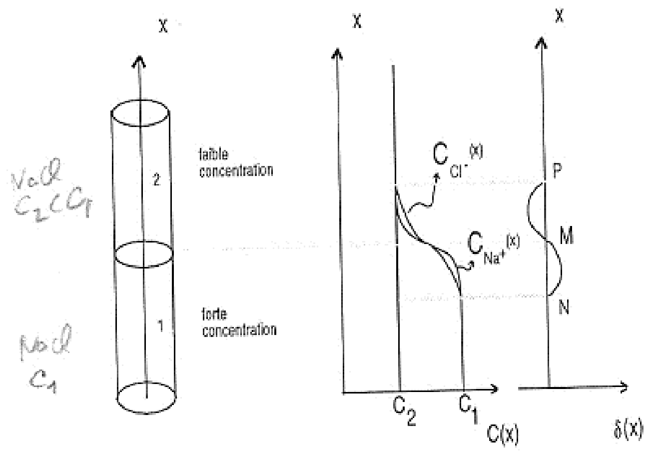
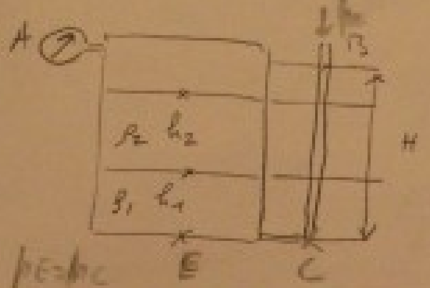


figure 2a figure 2b figure 2c

EX2 Mesure de pression

Pq ; EX2 glycérine : ρ_1, h_1 huile : ρ_2, h_2



$H = 1,5 + 3,9 + 2,1 = 7,5\,m$

$h_1 = 2,1\,m$

$h_2 = 3,9\,m$

1) $p_E = p_C$

2) $p_E = p_B + \rho_1 g H = p_a + \rho_1 g H$

$= \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 + p_A$

3) donc $p_A = p_B + \rho_1 g (H - h_1) - \rho_2 g h_2$

$p_A = p_a + \rho_1 g (H - h_1) - \rho_2 g h_2$

$= 1,013\ 10^5 + 1258 \times 9,81 \times 5,4 - 832 \times 9,81 \times 3,9$

$= 1,013\ 10^5 + 9,81\,(6793,2 - 3244,8)$

$= 1,013\ 10^5 + 9,81 \times 3548,4$

$= 1,013\ 10^5 + 34809,80 = (1,013 + 0,348)\,10^5$

$= 1,361\ 10^5\ Pa$

EX1

Rep : $\sigma = q^2 (C_{Na^+}\mu_{Na^+} + C_{K^+}\mu_{K^+} + C_{Cl^-}\mu_{Cl^-})$.

$C_{Na^+} = 12\ mole/m^3 = 12\,\mathcal{N}$ molécule/m³ idem pour K^+, Cl

$= \frac{q^2}{kT} (C_{Na^+} D_{Na^+} + C_{K^+} D_{K^+} + C_{Cl^-} D_{Cl^-})$

AN : $\sigma = \frac{(1,6\ 10^{-19})^2\ 6,023\ 10^{23}}{1,38\ 10^{-23} \times 303} (12 \times 1,33 + 155 \times 1,95 + 4 \times 2,03)\ 10^{-9}$

$= 0,0??4 \times \frac{15,96 + 302,25 + 8,12}{326,33} = 12,152\ 10^{-1}$

$\sigma = 1,215\ (\Omega.m)^{-1}$

$\rho = 0,823\ \Omega m = \frac{1}{\sigma}$

Exo 3 1) la [illegible] de courant

2)

3) $j_+ = j_-$ [illegible] $\mu_{Na^+} = \mu_+$ $\quad \mu_{Cl^-} = \mu_-$

$$-\mu_+\left(kT\frac{dC}{dx} + qC\frac{dV}{dx}\right) = -\mu_-\left(kT\frac{dC}{dx} - qC\frac{dV}{dx}\right)$$

$$-\mu_+\left(\frac{kT}{qC}\frac{dC}{dx} + \frac{dV}{dx}\right) = -\mu_-\left(\frac{kT}{qC}\frac{dC}{dx} - \frac{dV}{dx}\right)$$

$$\frac{dV}{dx}(\mu_- + \mu_+) = \frac{kT}{qC}(\mu_- - \mu_+)\frac{dC}{dx}$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{kT}{qC}\left(\frac{\mu_- - \mu_+}{\mu_- + \mu_+}\right)\frac{dC}{dx}$$

D'où $\boxed{a = \frac{kT}{q}\left(\frac{\mu_- - \mu_+}{\mu_- + \mu_+}\right)}$

$$\frac{dV}{dx} = a\,\frac{1}{C(x)}\,\frac{dC}{dx} \Rightarrow \int_1^2 dV = a\int_1^2 \frac{dC}{C}$$

$$\Delta V = V_2 - V_1 = a \ln\frac{C_2}{C_1}$$

$$\Delta V = \frac{kT}{q}\left(\frac{\mu_- - \mu_+}{\mu_- + \mu_+}\right)\ln\left(\frac{C_2}{C_1}\right)$$

$$\mu_i = \frac{D_i}{kT} \qquad \Delta V = \frac{kT}{q}\left(\frac{D_{Cl^-} - D_{Na^+}}{D_{Cl^-} + D_{Na^+}}\right)\ln\left(\frac{C_2}{C_1}\right)$$

~~4)~~ 5)

AN: $\frac{kT}{q} = \frac{1{,}38\,10^{-23} \times 300}{1{,}6\,10^{-19}} = 258{,}75\,10^{-4} = 25{,}8\text{ mV}$

$$\Delta V = 25{,}8\left(\frac{2{,}03 - 1{,}33}{2{,}03 + 1{,}33}\right)(-2{,}30)\text{ mV}$$

$$= -25{,}8\,\frac{0{,}7}{3{,}36}\,2{,}30 = -17{,}36\text{ mV}$$

< 0 charge < 0 en 2, > 0 en 1

Rep 2

Faculté des Sciences de Luminy
DEUG SV1

Année 2002-2003

Physique et Applications en Biologie
Session de Septembre

Les candidat(e)s peuvent disposer d'un formulaire personnel *manuscrit* constitué de 3 pages recto au format A4 et d'une calculatrice.

I Potentiels de Nernst et relation de Goldman (10 points)

Une membrane est rendue imperméable aux anions et perméable aux cations, à l'instant $t=0$. Elle est d'épaisseur d et sépare 2 compartiments contenant $NaCl$. La concentration de $NaCl$ est plus élevée dans le compartiment A que dans le compartiment B (voir figure 1). On note Ox un axe perpendiculaire à la membrane.

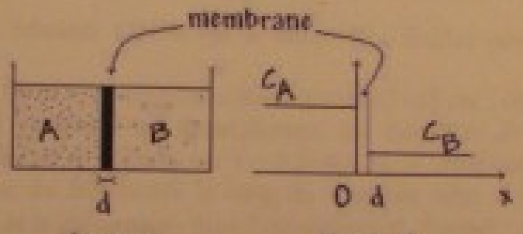


figure 1 figure 2

1) Les ions Na^+ se déplacent du compartiment A vers le compartiment B. Pourquoi ?

2) Cet afflux de charges positives crée une différence de potentiel (ddp) entre les 2 compartiments. La concentration et la ddp sont appelées $C(x)$ et $V(x)$ en tout point x.

Le courant d'ions Na^+ a une densité donnée par

$$j_+ = -\mu_+(kT\frac{dC}{dx} + qC(x)\frac{dV}{dx})$$

où μ_+ est la mobilité des ions Na^+, q la charge élémentaire, k la constante de Boltzmann et T la température absolue.

Un équilibre est atteint quand $j_+=0$. Les concentrations dans les compartiments sont alors C_A et C_B en admettant qu'une uniformisation se produit dans les compartiments (voir figure 2). Intégrez l'équation différentielle obtenue et déduisez la ddp $V_A - V_B$ (potentiel de Nernst E_{Na} des ions Na^+) entre les 2 compartiments en fonction de k, T, q, C_A et C_B, V_A et V_B étant les potentiels dans les compartiments A et B respectivement en $x=0$ et $x=d$.

A.N. : $C_A=145$ *mmoles/l*, $C_B=12$ *mmoles/l*, $T=300$ *K*, $k=1{,}38\ 10^{-23}$ *J/K*, $q=1{,}6\ 10^{-19}$ *Cb*.

Donnez E_{Na}.

3) La même expérience est réalisée en remplaçant $NaCl$ par KCl, la concentration de KCl étant plus élevée dans le compartiment B que dans le compartiment A. On a $C_A=4$ *mmoles/l*, $C_B=155$ *mmoles/l*. Quel est le potentiel de Nernst E_K des ions K^+ ?

4) Les concentrations ioniques typiques de cellules nerveuses de mammifères pour les ions Na^+, K^+ et Cl^-, à l'extérieur et à l'intérieur de la cellule, sont :

$C_{Na}(ext)=145$ *mmoles/l*, $C_{Na}(int)=12$ *mmoles/l*
$C_K(ext)=4$ *mmoles/l*, $C_K(int)=155$ *mmoles/l*
$C_{Cl}(ext)=123$ *mmoles/l*, $C_{Cl}(int)=5$ *mmoles/l*
Soient P_{Na}, P_K et P_{Cl} les perméabilités de la membrane de ces cellules aux ions Na^+, K^+ et Cl^-.
On donne

$\frac{P_{Na}}{P_K}=0,04$ et $\frac{P_{Cl}}{P_K}=0,45$. Par application de la relation de Goldman, calculez la ddp membranaire d'équilibre de ces cellules pour $T=300$ *K*.

II Relation de Bernouilli (5 points)

1) Soit la relation de Bernouilli $p+\rho gh+\frac{1}{2}\rho v^2=\text{constante}$. Quelle est la signification des termes de cette relation. Quelle est la nature des fluides pour lesquels cette relation s'applique?

2) Dans un tube de section circulaire de diamètre $D=25$ *cm*, de l'eau est en mouvement horizontal. Le tube présente un étranglement de diamètre $d=10$ *cm*. En amont de l'étranglement, la vitesse du fluide est $v_1=0,2$ *m/s* et la pression y est $p_1=1,5\ 10^3 Pa$. En appliquant la relation de Bernouilli le long de l'axe du tube et la conservation du débit, calculez la vitesse v_2 et la pression p_2 dans l'étranglement. Rappel : $\rho=1000$ kg/m^3.

III Résistances vasculaires équivalentes (5 points)

Une artériole se ramifie en N capillaires, dans lesquels circule du sang de viscosité η. On appelle R_A la résistance vasculaire de l'artériole (de longueur $L_A=L_1+L_2$, de rayon r_A, voir figure 3) et R_C la résistance vasculaire de chaque capillaire (de longueur L_C et de rayon r_C).

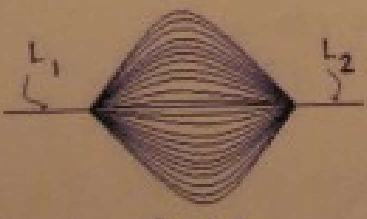


figure 3

1) Quelle est la résistance vasculaire R_{eq} équivalente au système de capillaires en fonction de R_C et N ?

2) Les longueurs L_A et L_C de même que les rayons r_A et r_C sont reliés par les relations $L_c=\frac{L_A}{\alpha}$ et $r_C=\frac{r_A}{\beta}$. Calculez le rapport $\frac{R_{eq}}{R_A}$ en fonction de α, β et N.

3) On peut considérer, par des mesures de pression, que $\frac{R_{eq}}{R_A}=0,8$ avec $\alpha=1,5$ et N=30.

Calculez le coefficient β.

SV4 Sept 2003

1) Le sens de déplacement des concentrations élevées vers les basses concentrations.

Rep 2) $kT \frac{dC}{dx} + q\, C(x) \frac{dV}{dx} = 0$

$$\frac{1}{C}\frac{dC}{dx} + \frac{q}{kT}\frac{dV}{dx} = 0$$

$$\int_0^d \frac{d}{dx}(\ln C)\,dx + \frac{q}{kT}\int_0^d \frac{dV}{dx}\,dx = 0$$

$$\ln\left(\frac{C_B}{C_A}\right) + \frac{q}{kT}(V_B - V_A) = 0$$

$$\boxed{V_B - V_A = -\frac{kT}{q}\ln\left(\frac{C_B}{C_A}\right)}$$

AN: $V_B - V_A = -258{,}75\ 10^{-4}\ \ln\left(\frac{12}{145}\right)$

67 mV

$k = 1{,}38\ 10^{-23}$

$T = 300\,K$

$q = 1{,}6\ 10^{-19}$

$\frac{kT}{q} = \frac{1{,}38\ 10^{-23}\ 300}{1{,}6\ 10^{-19}} = 258{,}75\ 10^{-4}$

$C_B = 12$ mmole/l

$C_A = 145$ mmole/l

$V_B - V_A = -258{,}75\ 10^{-4}\ (-2{,}492)$

$= -644{,}76\ 10^{-4}\ V = 64{,}47\ 10^{-3}\ V$

$= -64{,}47\ mV = E_{Na}$

Autre AN: (non cité dans l'énoncé)

$C_A = 0{,}1$ mmole/l $\qquad T = 300\,K$

$C_B = 0.01$ mmole/l

$V_B - V_A = -258{,}75\ 10^{-4}\ \ln\left(\frac{0.01}{0{,}1}\right) =$

$= -258{,}75\ 10^{-4}\ \ln(0.1)$

$= +595{,}79\ 10^{-4}\ V = +59{,}57\ mV$

$V_B > V_A$

Rep ①

K^+

3) $$V_B - V_A = -\frac{kT}{q} \ln\left(\frac{C_B}{C_A}\right) = -258{,}75\,10^{-4} \times \ln\left(\frac{155}{4}\right)$$

$$= -258{,}75\,10^{-4} \times \cancel{}\ 38{,}75$$

$$\ln\left(\frac{155}{4}\right) \approx 3{,}657$$

$$= -946{,}28\,10^{-4}\ V$$

$$= -94{,}62\,10^{-3}\ V = -94{,}62\ mV = E_K$$

4) $$V_M^0 = -\frac{kT}{q} \ln\left[\frac{P_{Na}\,C_{Na}(in) + P_K\,C_K(in) + P_{Cl}\,C_{Cl}(out)}{P_{Na}\,C_{Na}(out) + P_K\,C_K(out) + P_{Cl}\,C_{Cl}(int)}\right]$$

$$= -\frac{kT}{q} \ln\left[\frac{\frac{P_{Na}}{P_K}\,C_{Na}(in) + C_K(in) + \frac{P_{Cl}}{P_K}\,C_{Cl}(out)}{\frac{P_{Na}}{P_K}\,C_{Na}(out) + C_K(out) + \frac{P_{Cl}}{P_K}\,C_{Cl}(int)}\right]$$

$\downarrow$

$$V_M^0 = -\frac{kT}{q} \ln\left(\frac{0{,}04 \cdot 12 + 155 + 0{,}45 \cdot 123}{0{,}04 \cdot 145 + 4 + 0{,}45 \cdot 5}\right)$$

=

$$\frac{kT}{q} = \frac{1{,}38\ 10^{-23} \cdot 300}{1{,}6\ 10^{-19}} = 258{,}75\ 10^{-4}$$

$$V_M^0 = -258{,}75\ 10^{-4} \ln\left(\frac{0{,}48 + 155 + 55{,}35}{5{,}8 + 4 + 2{,}25}\right)$$

$$= -258{,}75\ 10^{-4} \ln \frac{210{,}83}{12{,}05}$$

$$= -258{,}75\ 10^{-4} \ln 17{,}496$$

$$= -258{,}75\ 10^{-4}\ 2{,}861$$

$$= -740{,}53\ 10^{-4} = -74{,}05\ 10^{-3}\ V$$

$$\boxed{V_M^0 = -74{,}05\ mV}$$

II/ Relation de Bernoulli

$D = 25$ cm

$d = 10$ cm

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \qquad v_1 = 0{,}2\ m/s$$

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \qquad S_1 = \pi \frac{D^2}{4}$$

$$v_1 D^2 = v_2 d^2 \qquad S_2 = \pi \frac{d^2}{4}$$

$$v_1 = v_2 \left(\frac{d}{D}\right)^2$$

$$\boxed{v_2 = v_1 \left(\frac{D}{d}\right)^2}$$

AN $v_2 = 0{,}2 \left(\frac{25}{10}\right)^2$

$= 0{,}2 \times (2{,}5)^2$

$= 0{,}2 \times 6{,}25$

$\boxed{v_2 = 1{,}25\ m/s}$

$$\boxed{p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho\left(v_1^2 - v_2^2\right)}$$

AN : $p_2 = 1{,}5\ 10^3 + \frac{1}{2}\ 1000\ (0{,}04 - 1{,}56)$

$= 1{,}5\ 10^3 - 500 \cdot 1{,}52$

$= 1500 - 761{,}25 = \boxed{738{,}75\ Pa = p_2}$

ou bien $p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho\left(v_1^2 - v_2^2\right)$

$= p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \left(1 - \frac{v_2^2}{v_1^2}\right)$

$= p_1 + \frac{1}{2} 1000 \times 0{,}04 \left(1 - \frac{1{,}5625}{0{,}04}\right)$

$= 738{,}75\ Pa$

Faculté des Sciences de Luminy
DEUG SV1

Année 2002-2003

Physique et Applications en Biologie
Session de Juin

Les candidat(e)s peuvent disposer d'un formulaire personnel *manuscrit* constitué de 3 pages recto au format A4 et d'une calculatrice non programmable

I : Débitmètre de Prandtl

Un débitmètre, tel que celui qui est représenté sur la figure 1 ci dessous, est plongé dans un fluide en écoulement. Ce dernier, de masse volumique ρ, est peu perturbé par le dispositif, sauf au point A où la vitesse du fluide est nulle. A est dit point d'arrêt. La vitesse au point B est supposée être celle de la vitesse d'écoulement du fluide en l'absence de débitmètre. Deux petites ouvertures sont effectuées en A et B pour permettre les transferts de pression entre l'intérieur et l'extérieur du dispositif.

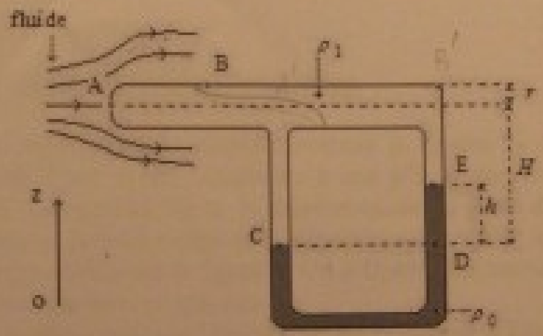


Figure 1

Le liquide présent dans le tube en U du débitmètre a une masse volumique ρ_0, le liquide présent au dessus du tube en U dans le débitmètre est un mélange de fluide et d'air, de masse volumique ρ_1. L'axe oz est dirigé verticalement vers le haut.

1) Rappelez la loi de Bernouilli reliant la pression p, la vitesse v, la masse volumique ρ, l'altitude z et la constante de gravitation g en différents points d'un fluide (non visqueux) en mouvement.

2) Exprimez la loi de Bernouilli entre les points A et B. En déduire $p_A - p_B$ en fonction de ρ, v_B, la vitesse du fluide au point B, r et g, où $r = z_B - z_A$.

3) Exprimez la loi de Pascal dans le débitmètre (où le liquide présent dans le débitmètre est au repos) entre les points C et A, puis entre les points D et B. En déduire $p_A - p_B$ en fonction de ρ_0, ρ_1, h, r et g. On pourra désigner $H = z_A - z_D$.

4) Déduisez de 2) et 3) v_B en fonction de ρ_0, ρ_1, ρ, h, r et g. En fait, $r = 0$ et $\rho_1 = \rho$. Exprimez v_B en fonction de ρ_0, ρ, h, et g (Prandtl).

5) Application Numérique : le liquide en mouvement est du sang d'artère de chien ($\rho = 1059{,}5\ kg/m^3$), la masse volumique du liquide dans le tube est $\rho_0 = 1{,}15\ 10^3\ kg/m^3$. Quelle est la dénivellation h dans le débitmètre si la vitesse $v_B = 0{,}15\ m/s$?

T.S.V.P

II : Conductivité molaire

Soit une solution de chlorure de potassium dans l'eau avec une concentration C *moles/l*. Les coefficients de diffusion des ions K^+ et Cl^- sont respectivement notés D_+ et D_-.

1) Donnez l'expression de la conductivité σ de cette solution en fonction de C, q (la charge élémentaire), k (la constante de Boltzmann), T (la température absolue), D_+ et D_-. Quelle est l'unité de la conductivité ?

2) A.N : $T=300\ K$, $C=0{,}8\ 10^{-3}$ *moles/l*, $D_+=1{,}95\ 10^{-9}\ m^2/s$ et $D_-=2{,}03\ 10^{-9}\ m^2/s$.
Calculez σ. Rappel : $q=1{,}6\ 10^{-19}$ *Cb*, $k=1{,}38\ 10^{-23}$ *Joules/K*, *Nombre Avogadro*$=6{,}02\ 10^{23}$.

3) Les ions Na^+ et Cl^- sont assimilés à des sphères de rayons r_+ et r_-. Soit $\phi=\dfrac{\sigma}{C}$ la conductivité molaire. La viscosité η du milieu acqueux, pouvant varier avec la température, montrez que le produit $\phi\ \eta$ reste constant par rapport à la concentration C et la température T, et s'exprime en fonction de q, r_+ et r_-.

III : Réponses d'axones à des faibles stimulations

Un axone (non myélénisé) est stimulé, comme le montre la figure 2, au point $x=0$ à l'instant $t=0$ à l'aide d'une sonde, connectée à une pile de force électromotrice E, qui est insérée dans l'axone. On appelle $V(x,t)$ la dépolarisation au point d'abscisse x de l'axone, à l'instant t. Les variations dans le temps de la dépolarisation en $x = x_0 = 0$, $x = x_1 = 1mm$ et $x = x_2 = 2mm$ sont représentées sur la figure 3. On a $U_0<E$. La connaissance de la résistance r et de E n'est pas nécessaire dans ce qui suit.

1) Pour t grand, la dépolarisation $V(x,t)$ est indépendante de t. Elle est désignée par $v(x)$ et vérifie

$$\frac{d^2v}{dx^2}-\frac{v}{\lambda^2}=0 \quad (E_1)$$

λ est la constante d'espace de l'axone. Vérifiez que la solution de l'équation (E_1) est, pour $x>0$,

$$v(x)=U_0\,e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

2) A l'aide de la figure 3 et de la solution de l'équation (E_1), donnez l'expression de λ en fonction de U_0 et U_1.
A.N. U_0=30 mV, U_1=22 mV. Donnez la valeur de λ et son unité.

3) Chaque courbe sur la figure 3 correspond à une expression de la forme

$$V_i(t)=V(x_i,t)=U_i\,(1-e^{-\frac{t}{\tau_i}}) \quad i=0,1,2, \quad x_0=0,\ x_1=1\ mm,\ x_2=2\ mm.$$

Calculez la dérivée de $V_i(t)$. Exprimez la constante de temps τ_i en fonction de U_i et de la dérivée de $V_i(t)$ en t=0 qui est mesurable.

T.S.V.P

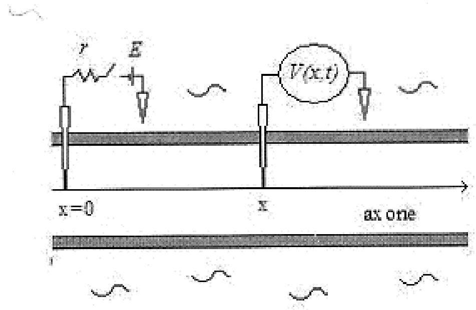


Figure 2

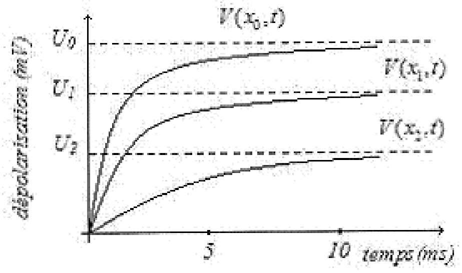


Figure 3

Barème : I : 7 points, II : 7 points, III : 6 points

****

SM Juin 2003

Rep : I 1) $p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = ct$

2) $p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g r$

$$\boxed{p_A - p_B = \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g r}$$

3) $p_C = p_A + \rho_1 g H = p_D = \rho_0 g h + \rho_1 g (H - h + r) + p_B$

$$\boxed{p_A - p_B = \rho_1 g (r - h) + \rho_0 g h}$$

$$\boxed{p_A - p_B = (\rho_0 - \rho_1) g h + \rho_1 g r}$$

4) $p_A - p_B = \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g r = (\rho_0 - \rho_1) g h + \rho_1 g r$

$\frac{1}{2}\rho v_B^2 = (\rho_0 - \rho_1) g h + (\rho_1 - \rho) g r$ $\quad \boxed{v_B = \sqrt{\frac{2g[(\rho_0-\rho_1)h + (\rho_1-\rho) r]}{\rho}}}$

$\rho_1 \approx \rho \quad r \approx 0 \qquad \frac{1}{2}\rho v_B^2 = (\rho_0 - \rho) g h$

$$\boxed{v_B = \sqrt{\frac{2(\rho_0 - \rho) g h}{\rho}} \quad \text{(Prandtl)}}$$

5) AN. $v_B = 0,15\ m/s \quad \rho_0 = 1150\ kg/m^3 \quad \rho = 1059,5\ kg/m^3$

$$h = \frac{1}{2}\frac{\rho v_B^2}{(\rho_0 - \rho) g} = \frac{1}{2}\frac{1059,5 \quad 2,25\ 10^{-2}}{90,5 \times 9,81} = 0,013\ m = 1,3\ cm$$

II 1) $\sigma = \frac{C q^2}{kT}(D_1 + D_2)$

unité dim $[\sigma] = \frac{[q]}{[E]} \cdot \frac{[S]}{[S]}\,\frac{[L]}{[R][S]} = [R]^{-1}[L]^{-1}$

unité $(\Omega \cdot m)^{-1}$

2) AN $\quad \sigma = 11,8\ 10^{-3}\ (\Omega.m)^{-1}$

$= 0,0118\ (\Omega m)^{-1}$

(1)

3) $\frac{D}{kT} = \frac{1}{6\pi\eta r_+}$ $\frac{D}{kT} = \frac{1}{6\pi\eta r_-}$

$$\phi = \frac{\sigma}{c} = \frac{q^2}{6\pi\eta}\left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}\right) \Rightarrow \phi\eta = \frac{q^2}{6\pi}\left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}\right) = cte/c\ cte/T$$

II 1) $\frac{d^2v}{dx^2} - \frac{v}{\lambda^2} = 0$ $\frac{dv}{dx} = U_0\left(-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\frac{x}{\lambda}}$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = U_0\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)e^{-\frac{x}{\lambda}} = \frac{1}{\lambda^2}v$$

2) $v(x=0)$ = valeur asymptotique de $V(x_0, t) = U_0$

$v(x=1mm)$ = " " $V(x_1, t) = U_1 = U_0 e^{-\frac{1}{\lambda}}$

$$\Rightarrow \frac{U_1}{U_0} = e^{-\frac{1}{\lambda}} \quad -\frac{1}{\lambda} = \ln\left(\frac{U_1}{U_0}\right) \quad 1/\lambda = \ln\left(\frac{U_0}{U_1}\right)$$

λ en mm.

$\lambda = 3{,}22\,mm$

3) $\frac{dV_i}{dt} = \frac{U_i}{\tau_i} e^{-t/\tau_i}$ $\left(\frac{dV_i}{dt}\right)_{t=0} = \frac{U_i}{\tau_i}$

$$\tau_i = \frac{U_i}{(V_i')_{t=0}}$$

— N —

Faculté des Sciences de Luminy
DEUG SV1 Année 2000-01

Physique et Applications en Biologie

Session de Septembre

Les candidats(es) peuvent disposer d'un formulaire personnel manuscrit constitué de 3 pages recto au format A4 et d'une calculatrice non programmable.

1 Loi de Fick. Extraction d'iode

Un récipient de forme cylindrique, de section d'aire S contient du benzène sur une hauteur h_1 et de l'eau sur une hauteur h_2 (voir figure 1). De l'iode se trouve initialement dans l'eau et il s'agit de l'étude de son transfert, par diffusion, vers le benzène.

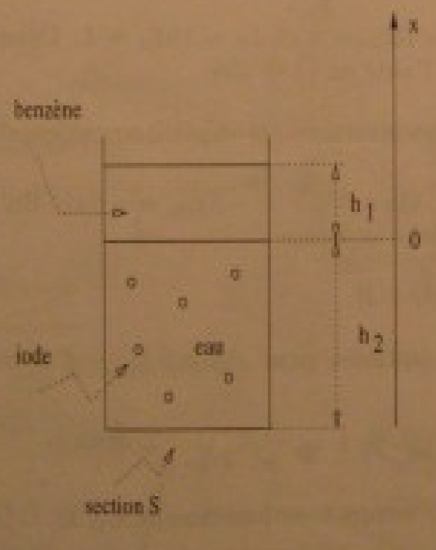


figure 1

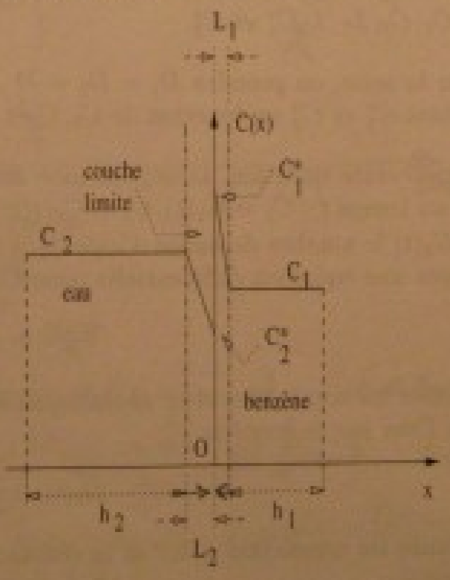


figure 2

A un instant donné t, les concentrations d'iode dans le benzène et l'eau sont appelées C_1 et C_2, avec C_1 et C_2 constantes en dehors de l'interface eau-benzène, appelée couche limite (voir figure 2). Les concentrations seront exprimées en $moles/m^3$. Pour alléger les notations, on considérera $C_1 = C_1(t)$, $C_2 = C_2(t)$.

La couche limite a une épaisseur L_1 dans le benzène ; la concentration d'iode y croît linéairement de C_1 à C_1^*. Cette couche a une épaisseur L_2 dans l'eau ; la concentration d'iode y décroît linéairement de C_2 à C_2^*. On a $C_1^* = K\, C_2^*$ avec la constante dite de partage $K > 1$.

La couche limite est d'épaisseur $L_1 + L_2$ faible par rapport à h_1 et h_2. Par la suite, on négligera les quantités d'iode situées dans cette couche limite par rapport aux mêmes quantités situées dans le benzène et l'eau.

On rappelle que par la loi de Fick $j_D = -D\frac{\partial C}{\partial x}$, la densité de courant d'iode dans un soluté j_D dépend du gradient de la concentration $C(x)$ et du coefficient de diffusion D de l'iode dans ce soluté.

1) A l'instant $t = 0$, $C_1(t = 0) = 0$ et $C_2(t = 0) = C_0$. En considérant que le nombre total de moles d'iodes est conservé, donnez la relation entre C_1, C_2, C_0, h_1 et h_2.

2) La concentration d'iode dans les 2 parties de la couche limite est de la forme

$$C(x) = \left(\frac{C_1 - C_1^*}{L_1}\right)x + C_1^* \qquad 0 < x < L_1$$
$$C(x) = \left(\frac{C_2^* - C_2}{L_2}\right)x + C_2^* \qquad -L_2 < x < 0$$

2a) Exprimez les densités de courant d'iode J_{D_1} et J_{D_2} dans le benzène et l'eau, incluant la couche limite.

2b) En régime stationnaire, ces 2 densités sont égales. En déduire une relation entre $D_1, D_2, C_1, C_2, L_1, L_2, C_1^*$ et C_2^*.

3) Par la suite, on prendra $D_1 = D_2 = D$, $h_2 = 10h_1 = h$ et $L_2 = 10L_1 = L$. Déterminez à tout instant C_1^* et C_2^* en fonction de C_2, C_0 et K à l'aide de 1) et 2b).

4 : Dans cette question, la dépendance des concentrations est explicitement exprimée par rapport au temps t : $C_1 = C_1(t), C_2 = C_2(t)$.

Soit $N_2(t)$ le nombre de moles d'iode dans l'eau. On a $\frac{dN_2(t)}{dt} = -Sj_{D_2} = -Sj_D$. En utilisant 3), obtenez une équation différentielle pour $C_2(t)$ sous la forme

$$\frac{dC_2(t)}{dt} = AC_2(t) + B$$

Exprimez les constantes A et B. Intégrez cette équation pour obtenir *la loi d'extraction de l'iode de l'eau par le benzène*

$$C_2(t) = \cancel{a(b+ce^{-t/\tau})} = a + b e^{-t/\tau}$$

Exprimez les constantes a, b, c et la constante de temps τ en fonction de C_0, D, L, h et K.

5 : Application Numérique : $D = 2.10^{-9}\,m^2.s^{-1}$, $L = 2\,mm$, $h = 5\,cm$, $K = 500$. Calculez τ en heures.
~~Donnez~~ Donnez l'allure de ~~la~~ la variation de concentration d'iode dans l'eau. On indiquera la valeur de $C(t=\tau)/$

2

Rep : 1) $C_1 h_1 S + C_2 h_2 S = C_0 h_2 S$

d'où $C_1 h_1 + C_2 h_2 = C_0 h_2$

2) a) $j_{D_1} = -D_1 \frac{dC}{dx} = -D_1 \left(\frac{C_1 - C_1^*}{L_1}\right)$

$j_{D_2} = -D_2 \frac{dC}{dx} = -D_2 \left(\frac{C_2^* - C_2}{L_2}\right)$

b) $D_2 \left(\frac{C_2^* - C_2}{L_2}\right) = D_1 \left(\frac{C_1 - C_1^*}{L_1}\right)$

3) $D_1 = D_2 = D$ $\quad h_2 = 10 h_1 = h \quad L_2 = 10 L_1 = L$

On a $C_1^* = k C_2^*$

$\frac{D}{L}(C_2^* - C_2) = \frac{D}{0{,}1 L}(C_1 - C_1^*)$

$C_1\, 0{,}1 h + C_2 h = C_0 h$

$C_1 + 10 C_2 = 10 C_0$

$(C_2^* - C_2) = 10(C_1 - C_1^*) = 10(C_1 - k C_2^*)$

d'où $C_2^*(1 + 10k) = 10 C_1 + C_2$

$C_2^* = \frac{1}{1+10k}(100 C_0 - 100 C_2 + C_2)$

$C_2^* = \frac{1}{1+10k}(100 C_0 - 99 C_2)$

$C_1^* = \frac{k}{1+10k}(100 C_0 - 99 C_2)$

4) $\frac{dN_2}{dt} = -S j_{D_2} = -S j_D$ $\quad$ puisque $D_2 = D_1 = D$

$= \frac{d}{dt}(C_2 h_2 S)$

$= S D \left(\frac{C_2^* - C_2}{L_2}\right) = h_2 S \frac{dC_2}{dt}$

d'où $\frac{dC_2}{dt} = \frac{D}{h_2 L_2}(C_2^* - C_2)$ $\quad h_2 = h$, $L_2 = L$

$$\frac{dC_2}{dt} = \frac{D}{hL}\left(C_2^{*} - C_2\right)$$

$$= \frac{D}{hL}\left[\frac{1}{1+10K}\left(100\,C_0 - 99\,C_2\right) - C_2\right]$$

$$= \frac{D}{hL(1+10K)}\left[100\,C_0 - (100+10K)\,C_2\right]$$

On a alors $\dfrac{dC_2(t)}{dt} = A\,C_2(t) + B$

avec $A = \dfrac{-D\cdot 10}{hL(1+10K)}\,(10+K)$

$B = \dfrac{100\,D\,C_0}{hL\,(1+10K)}$

Intégration : Soit $A = -\dfrac{1}{\tau}$

On a $C_2(t) = (C_0 - B\tau)\,e^{-t/\tau} + B\tau$

Après substitution, on a :

$$C_2(t) = \left(\frac{C_0}{10+K}\right)\left(K e^{-t/\tau} + 10\right)$$

Application numérique : $D = 2\cdot 10^{-9}\ m^2 s^{-1}$

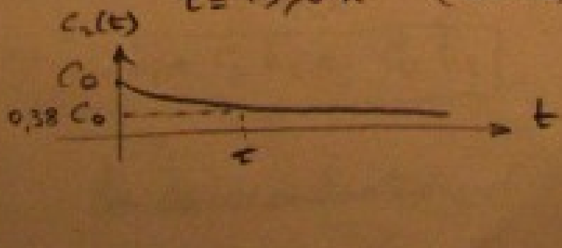
$L_1 = 0{,}2\ mm$ $L = 2\ mm$

$= L_2 = 10 L_1$

$K = 500$ $h = 5\ cm = 10\, h_1$

$h_1 = 5\ mm$

$\tau = 13{,}6\ h$ (heures)



$$\frac{C(\tau)}{C_0} = \frac{1}{10+K}\left(\frac{K}{e} + 10\right) = 0{,}38$$

Faculté des Sciences de Luminy
DEUG SV1 Année 2001-02

Physique et Applications en Biologie
Session de Septembre

Les candidats(es) peuvent disposer d'un formulaire personnel manuscrit constitué de 3 pages recto au format A4. Les calculatrices sont autorisées.

1 Cables neuronaux (14 points)

La dépolarisation membranaire d'un axone $v(x,t)$ vérifie, dans le cas d'une faible stimulation, l'équation des cables

$$(E1) \quad \frac{1}{2\pi\, a\, R_a}\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} - g_M^0\, v(x\,,\,t) \;=\; C_M\,\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}$$

où a est le rayon de l'axoplasme, R_a est la résistance de l'axoplasme par unité de longueur, g_M^0 et C_M sont la conductance et la capacitance transmembranaire par unité de surface.

On considère une partition de l'axone en segments de longueur Δ (petite) (voir figure 1) et on remplace $v(x,t)$ par $v_j(t) \;=\; v(j\,\Delta\,,\,t)$ pour $x \;=\; j\,\Delta$.

Si Δ est suffisamment petit, on a :

$$\frac{\partial v_{j+\frac{1}{2}}(t)}{\partial x} \simeq \frac{1}{\Delta}\,(\,v_{j+\frac{1}{2}}(\,t\,) - v_{j-\frac{1}{2}}(\,t\,)\,)$$

On en déduit

$$\frac{\partial^2 v_j(t)}{\partial x^2} \simeq \frac{1}{\Delta^2}\,(v_{j+1}(\,t\,) - 2\,v_j(\,t\,) + v_{j-1}(\,t\,)).$$

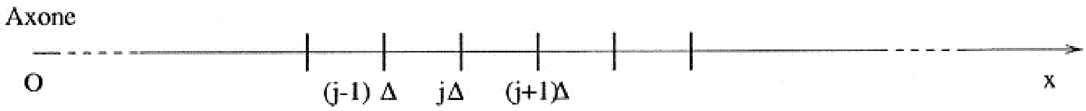


figure 1

1. Montrez, par substitution, que l'équation initiale $(E1)$ est approximée par

$$(E2) \quad \frac{1}{2\pi\, a\, R_a\, \Delta^2}\,(v_{j+1} - 2\,v_j + v_{j-1}) - g_M^0\, v_j \;=\; C_M\,\frac{\partial v_j}{\partial t}$$

(où on a omis d'écrire la dépendance par rapport au temps t).

2. Il est possible d'obtenir $(E2)$ en considérant une suite de résistances et de condensateurs disposés comme cela est indiqué sur la figure 2.

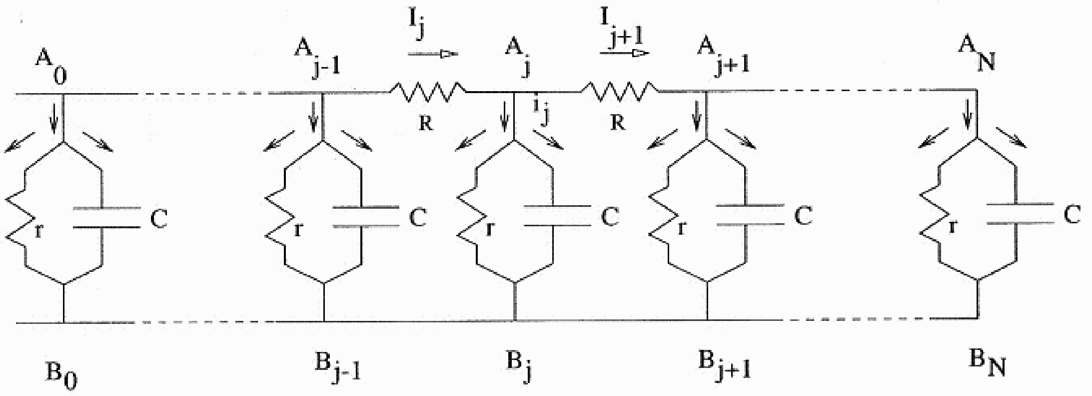


figure 2

Les points $B_0, B_1, ..., B_N$ sont au même potentiel (celui du milieu externe à l'axone). La j^{ieme} cellule électrique est représentée sur la figure 3.

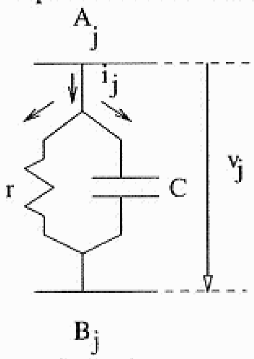


figure 3

a) Sachant que le courant circulant dans le condensateur est $C\,\frac{\partial v_j}{\partial t}$, exprimez le courant i_j en fonction de v_j , r , C et $\frac{\partial v_j}{\partial t}$ (voir la figure 3 pour le signification de v_j).

b) Exprimez i_j en fonction de I_j et I_{j+1}.

c)Exprimez $v_{j+1} - v_j$ en fonction de I_{j+1} et R, et $v_j - v_{j-1}$ en fonction de I_j et R.

d) Déduire de c) avec a) et b), une relation, notée $E(3)$, entre v_{j-1} , v_j , v_{j+1} et $\frac{\partial v_j}{\partial t}$. Par identification avec $(E2)$, exprimez les valeurs des résistances R et r et de la capacitance C en fonction des paramètres neuronaux R_a, a, g_M^0, C_M et de Δ.

3. Une différence de potentiel alternative de pulsation ω et d'amplitude V_0 , $v_0(t) \;=\; V_0\,cos(\,\omega\,t\,)$ est à présent appliquée à l'axone en $x \,=\, 0$. On désire caractériser la dépolarisation qui en résulte au point $x_j \,=\, j\,\Delta$ à tout instant t.

Les solutions sont de la forme

$$v_j(t) = V_0 e^{-\alpha j} cos(\omega t + b j)$$

où α est appelé facteur d'amortissement.

Vérifiez, par substitution dans $(E3)$(ou bien dans $(E2)$), que $v_j(t)$ est bien solution à condition que α et b vérifient 2 relations de la forme

$$F(b)(e^{\alpha} + e^{-\alpha}) = (2 + \frac{R}{r})$$

$(E4)$

$$G(b)(e^{\alpha} - e^{-\alpha}) = -RC\omega.$$

Exprimez $F(b)$ et $G(b)$. (0n identifiera les termes en facteur de $cos(\omega t + b j)$ et $sin(\omega t + b j)$ dans l'expression obtenue par substitution.

Rappel : $cos(u \pm v) = cos(u)cos(v) \mp sin(u)sin(v)$.

4. Le facteur d'amortissement α est généralement faible. On a alors $e^{\alpha} \simeq 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2}$ et $e^{-\alpha} \simeq 1 - \alpha + \frac{\alpha^2}{2}$. Par substitution dans $(E4)$, déduisez une relation $(E5)$ entre α , R , r , C et ω.

Rappel : $cos^2(u) + sin^2(u) = 1$.

5. Application : Pour des segments de longueur $\Delta = 0,1mm$ et une fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi} = 100Hz$, on mesure un facteur d'amortissement $\alpha = 10^{-2}$ pour un axone tel que $2\pi a R_a = 2500\,\Omega$. On a $\frac{R}{r} = 10^{-3}$. Estimez, à l'aide de $(E5)$, la capacitance C_M. Par une autre méthode, C_M a été évaluée à $10^{-6}F/cm^2$. Conclusion.

2 Résistances vasculaires(Question de cours 6 points)

Quels sont les types de fluides concernés par cette notion ?

Quelle est la loi dynamique permettant de l'introduire ?

Quelles sont les quantités physiques associées ?

Equivalence électrique : indiquez sa signification.

Donnez une illustration de cette équivalence pour des vaisseaux sanguins en parallèle.

Si Δ est suffisamment petit, on a

$$\frac{\partial v}{\partial x}(j\Delta,t) \simeq \frac{1}{\Delta}\left(v(j\Delta+\frac{\Delta}{2},t)-v(j\Delta-\frac{\Delta}{2},t)\right)$$

On en déduit

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(j\Delta,t) \simeq \frac{1}{\Delta^2}\left(v_{j+1}(t)-2v_j(t)+v_{j-1}(t)\right)$$

1. Montrez, par substitution, que l'équation initiale (E1) est approximée par

$$\text{(E2)} \quad \frac{1}{2\pi a R_a \Delta^2}\left(v_{j+1}-2v_j+v_{j-1}\right)-g_M^0 v_j = C_M \frac{\partial v_j}{\partial t}$$

(où on a omis d'écrire la dépendance par rapport au temps t)

2. Il est possible d'obtenir ~~la relation~~ E(2) en considérant une suite de résistances et de condensateurs disposés comme cela est indiqué sur la figure 2

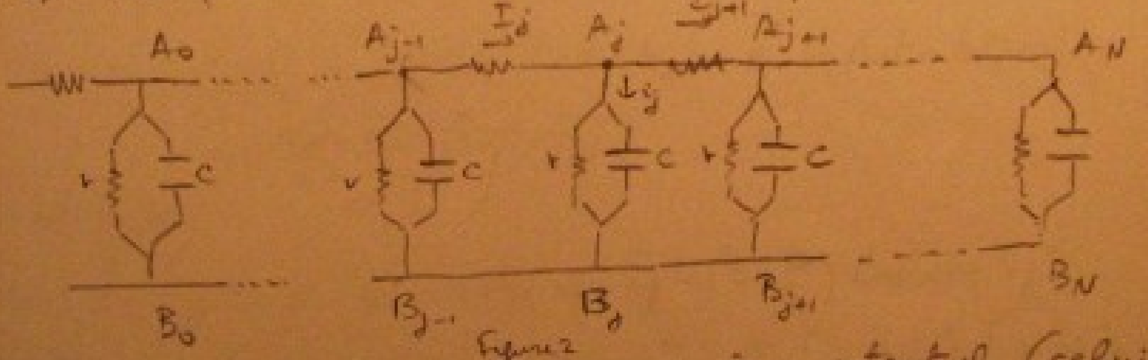


figure 2

les points $B_0, B_1 \ldots B_N$ sont au même potentiel (celui du milieu externe à l'axone)

La $j^{\text{ème}}$ cellule électrique est représentée sur la figure 3

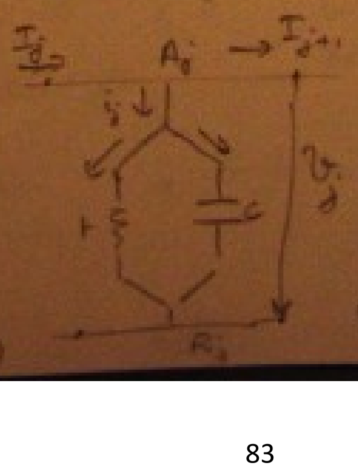


figure 3

Réponse (Septembre 2002)

1) Remplacer $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ par son $\frac{1}{\Delta^2}(v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1})$

on obtient (E2).

2) a) $i_j = \frac{v_j}{r} + C\frac{\partial v_j}{\partial t}$

b) $i_j = I_j - I_{j+1}$

c) $v_{j+1} - v_j = v_{A_{j+1}} - v_{A_j} = -RI_{j+1}$, $v_j - v_{j-1} = -RI_j$

d) $v_{j+1} - v_j - (v_j - v_{j-1}) = -RI_{j+1} - (-RI_j) = Ri_j = R\left(\frac{v_j}{r} + C\frac{\partial v_j}{\partial t}\right)$

$v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1} = R\left(\frac{v_j}{r} + C\frac{\partial v_j}{\partial t}\right)$

Donc $\mathcal{R}_0 \Delta = R$, $g_H^0 \Delta^2 = \frac{1}{r}$ et $C_H \Delta^2 = C$

3) On a $v_{j+1} - (2 + \frac{R}{r})v_j + v_{j-1} = RC\frac{\partial v_j}{\partial t}$

Par substitution et simplification par $V_0 e^{-\alpha j}$, on obtient

$$e^{-\alpha}\cos(\omega t + b(j+1)) - \left(2 + \frac{R}{r}\right)\cos(\omega t + bj) + e^{\alpha}\cos(\omega t + b(j-1))$$
$$= -RC\omega \sin(\omega t + bj)$$

On développe

$$e^{-\alpha}\left[\cos(\omega t + bj)\cos b - \sin(\omega t + bj)\sin b\right] - \left(2 + \frac{R}{r}\right)\cos(\omega t + bj)$$
$$+ e^{\alpha}\left[\cos(\omega t + bj)\cos b + \sin(\omega t + bj)\sin b\right] = -RC\omega\sin(\omega t + bj)$$

Par identification des termes en $\cos(\omega t + bj)$ et $\sin(\omega t + bj)$

$$e^{-\alpha}\cos b - \left(2 + \frac{R}{r}\right) + e^{\alpha}\cos b = 0$$
$$-e^{-\alpha}\sin b + e^{\alpha}\sin b = -RC\omega$$

(Ceci peut être également montré à l'aide des exponentielles complexes)

Donc $F(b) = \cos b$ et $G(b) = \sin b$

Rep 1

4) $e^{\alpha} = 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2}$ $\quad e^{-\alpha} = 1 - \alpha + \frac{\alpha^2}{2}$

D'où $\quad \cos b \left(1 - \cancel{\alpha} + \frac{\alpha^2}{2} + 1 + \cancel{\alpha} + \frac{\alpha^2}{2}\right) = \left(2 + \frac{R}{r}\right)$

$\sin b \left(1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2} - \left(1 - \alpha + \frac{\alpha^2}{2}\right)\right) = -RC\omega.$

c.a.d $\quad \cos b \left(2 + \alpha^2\right) = \left(2 + \frac{R}{r}\right)$

$\sin b \left(2\alpha\right) = -RC\omega.$

Remarque : $C = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{R}{r}$

Par élimination de $\cos b$, $\sin b$:

$$\frac{\left(2 + \frac{R}{r}\right)^2}{\left(2 + \alpha^2\right)^2} + \frac{R^2C^2\omega^2}{4\alpha^2} = 1$$

D'où (E.S) $\quad 4\alpha^2\left(2 + \frac{R}{r}\right)^2 + R^2C^2\omega^2\left(2 + \alpha^2\right)^2 = \left(2 + \alpha^2\right)^2 4\alpha^2$

(E.S) $\quad 4\alpha^2\left(2 + \frac{R}{r}\right)^2 = \left(2 + \alpha^2\right)^2\left[4\alpha^2 - R^2C^2\omega^2\right]$

5) AN : $\frac{R}{r} = 10^{-3}$ $\quad \alpha = 10^{-2}$ $\quad$ D'où

$4\,10^{-4}\left(2 + 10^{-3}\right)^2 = \left(2 + 10^{-4}\right)^2\left(4\,10^{-4} - R^2C^2\omega^2\right)$

$4\,10^{-4}(4) \quad = \left(4 + 4\,10^{-4} + 10^{-8}\right)\left(4\,10^{-4} - R^2C^2\omega^2\right)$

$\simeq 16\,10^{-4} - 4R^2C^2\omega^2 + 16\,10^{-8} - 4\,10^{-4}R^2C^2\omega^2$

$4R^2C^2\omega^2 \simeq 16\,10^{-8}$ $\qquad RC\omega = 2\,10^{-4}$

$RC\omega = \left(\frac{9}{2\pi a}R_a\right)\left(C_M\,\Delta^2\right)\left(2\pi\,\underbrace{100}_{Hz}\right)$ $\quad$ (2500 Ω)

$\Delta = 0{,}1\,10^{-3}\,m$

$= 2500\;C_M\;10^{-8}\;2\pi\;100 \;=\; 2\,10^{-4}$

$C_M = \frac{\cancel{2}\,10^{-4}}{2500\;10^{-8}\;\cancel{2}\pi\;100} = \frac{10^4}{2500 \cdot 100\pi} = \frac{4}{314} \simeq 1{,}2\,10^{-2}\,F/m^2$

Cmmuné $\quad C_M = 10^{-6}\,F/cm^2 = 10^{-6}\,10^4\,F/m^2 = 10^{-2}\,F/m^2$

Ω12

$V_j(t) = V_0 e^{-\alpha j} \cos(\omega t + b j)$

$= V_0 e^{-\alpha j} \frac{1}{2} \left(e^{i(\omega t + b j)} + e^{-i(\omega t + b j)} \right)$

$= V_0 \frac{1}{2} \left(e^{i\omega t} e^{(-\alpha + ib) j} + e^{-i\omega t} e^{(-\alpha - ib) j} \right)$

$e^{i\omega t} e^{(-\alpha+ib)j}$ solution et

$e^{-i\omega t} e^{(-\alpha-ib)j}$ solution la somme solution

① Soit $u_j = e^{(-\alpha+ib)j} e^{i\omega t}$ solution ?

$$\left[e^{(-\alpha+ib)(j+1)} - \left(2+\frac{R}{r}\right) e^{(-\alpha+ib)j} + e^{(-\alpha+ib)(j-1)} \right] e^{i\omega t}$$

$$= RC(i\omega) e^{(-\alpha+ib)j} e^{i\omega t}$$

$$\boxed{e^{-\alpha+ib} - \left(2+\frac{R}{r}\right) + e^{-(-\alpha+ib)} = iRC\omega}$$

② Soit $u_j = e^{(-\alpha-ib)j} e^{-i\omega t}$ Solution ?

$$\boxed{e^{(-\alpha-ib)} - \left(2+\frac{R}{r}\right) + e^{-(-\alpha-ib)} = -iRC\omega}$$

②+① $\cancel{2} e^{-\alpha} \cos b - \cancel{2}\left(2+\frac{R}{r}\right) + \cancel{2} e^{\alpha} \cos b = 0$

$$\boxed{\Rightarrow \cos b \left(e^{-\alpha} + e^{\alpha}\right) = \left(2+\frac{R}{r}\right)}$$

A1

Difference ① - ②

$$e^{-\alpha}\left[\cancel{p}\cancel{x}\,\text{sinh}\right] + e^{\alpha}\left(-\cancel{p}\cancel{x}\,\text{sinh}\right) = \cancel{p}\cancel{x}\,RC\omega$$

$$\text{sinh}\left(e^{-\alpha} - e^{+\alpha}\right) = RC\omega$$

$$\boxed{\text{sinh}\left(e^{+\alpha} - e^{-\alpha}\right) = -RC\omega}$$

— N —

A2