

§4. Onde dans le plasma

§4.1 Preliminaires

On va considérer ici divers types de perturbations dans le milieu pouvant se propager. Il s'agit alors d'établir une relation de dispersion $\omega(k)$ reliant la fréquence au vecteur d'onde.

On va considérer ici les ondes linéaires

la forme générale est de type
 $i(\partial_t + \vec{v} \cdot \nabla) \psi = 0$
 $\psi = \bar{\psi} e^{i(kx - \omega t)}$

où $\vec{r}^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $\bar{\psi}$ en général étant complexe. la vitesse de phase est $v_p = \frac{\omega}{k}$, la vitesse de groupe $\vec{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}}$

4.2 Champ magnétique nul.

4.2.1 Oscillations du plasma.

On va considérer ici les oscillations de plasma engendrées par des déplacements d'électrons par rapport à l'équilibre ; les ions, de masse nettement plus élevée peuvent être considérés comme immobiles, ce qui sera justifié par la suite. Les déplacements électroniques qui brisent la ~~per~~ neutralité engendrent des champs électriques qui s'opposent à ces déplacements, d'où oscillations qui sont en fait de grande fréquence.

On va déterminer la fréquence de ces oscillations ω_p dans les cas suivant : a) $T=0$ b) ions fixes et distribués uniformément c) le plasma est infini d) le mouvement des électrons s'effectue à 1 dimension x dans une

(1.2) $\vec{E} = |E| \vec{x}$ et $\vec{E} = 0$ et $\vec{B} = 0$ similitude
est dite électrostatique

Considérons les équations

$$\left. \begin{array}{l} (1.2.1) \quad m_e \left[\frac{\partial v_e}{\partial t} + (v_e \cdot \nabla) v_e \right] = -e n_e E \\ (1.2.2) \quad \frac{\partial n_e}{\partial t} + \text{div}(n_e v_e) = 0 \\ (1.2.3) \quad \epsilon_0 \text{div} E = e(n_i - n_e) \end{array} \right\} \quad |q| = e$$

On va supposer que les solutions n_e, v_e, E de ce système peuvent être écrites

(1.4) $k_e = k_0 + k_1$ $v_e = v_0 + v_1$ $E = E_0 + E_1$
 où les quantités avec indice 0 signifient des quantités
 relatives à l'équilibre et les quantités avec indice 1 sont
 des petites perturbations. L'approximation que nous allons
 faire va consister à linéariser les équations au voisinage
 des solutions d'équilibre c'est à dire à le conserver, dans
 la contribution (1.4) et remplacement dans (1.3) par les
 termes linéaires ; on effectuera ainsi un calcul au 1^{er} ordre
 des perturbations.

Donc d'abord, pour l'équilibre

$$\begin{aligned} v_0 &= 0 & v_0 &= 0 & E_0 &= 0 & \text{(répartition uniforme, fluide} \\ \frac{\partial v_0}{\partial t} &= 0 & \frac{\partial v_0}{\partial t} &= 0 & & & \text{à l'équilibre, neutrale)} \end{aligned}$$

On a alors, pour (1.3.1)

$$(1) \quad n \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + (v_1 \cdot \nabla) v_1 \right) = -e E_1 \quad \approx m \frac{\partial v_1}{\partial t}$$

Pour (1.3.2)

$$\begin{aligned} (2) \quad \frac{\partial n_1}{\partial t} + \text{div}(n_0 v_1 + v_1 \cdot \nabla n_0) &= 0 = \frac{\partial n_1}{\partial t} + \text{div} n_0 v_1 \\ &= \frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0 \text{div} v_1 + v_1 \cdot \nabla n_0 = \frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0 \text{div} v_1 \end{aligned}$$

Pour (1.3.3), comme les ions sont fixes $n_i = n_{i0}$ et

$$k_i - k_e = k_{i0} - k_0 - n_1 = -n_1 \quad n_{i0} = n_0 \quad \text{(neutrale à l'équilibre)}$$

Donc

$$(3) \quad \epsilon_0 \text{div} E_1 = -e n_1$$

On recherche les solutions pour les perturbations sous la forme $X_1 = \bar{X}_1 e^{i(kx - \omega t)}$ - on en déduit donc

$$-ik\omega v_1 = -eE_1$$

$$\vec{v}_1 = v_1 \vec{x}$$

$$\vec{E}_1 = E_1 \vec{x}$$

$$-i\omega n_1 = -n_0 i k v_1$$

$$ik\epsilon_0 E_1 = -en_1$$

On en déduit donc

$$-ik\omega v_1 = -e \left(\frac{-e}{ik\epsilon_0} \right) \left(\frac{-ik n_0}{-i\omega} \right) v_1$$

d'où

$$\omega^2 = \frac{n_0 e^2}{m \epsilon_0} \quad (*)$$

Les oscillations sont donc possibles à la fréquence $f_p = \frac{\omega_p}{2\pi}$ telle que

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m \epsilon_0}}$$

$$\text{Avec } n_0 = 10^{18} \text{ m}^{-3}$$

$$f_p \approx 9 \sqrt{n_0} = 9 \cdot 10^8 \text{ Hz} = 9 \text{ GHz}$$

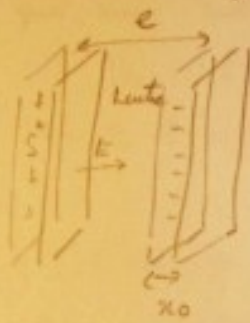
(ordre micrométrique)

On remarque que $\omega = \omega_p$ (ne dépend pas de k) ; d'où la vitesse de groupe est nulle - la perturbation ne se propage pas. Toute combinaison linéaire de solution avec des k différents est solution ; par exemple

$$\begin{aligned} & \bar{n}_1 e^{i(k_1 x - \omega t)} + \bar{n}_2 e^{i(k_2 x - \omega t)} \\ & = e^{-i\omega t} (\bar{n}_1 e^{ik_1 x} + \bar{n}_2 e^{ik_2 x}) \end{aligned}$$

d'où la propagation.

On peut aussi se représenter les oscillations de plasma de la façon suivante. On considère une tranche de plasma d'épaisseur fine l et de surface quelconque S . - Initialement l'ensemble est neutre -



On déplace alors les électrons, ensemble, de x_0 .
 La charge dans la tranche d'épaisseur x_0 est $q = n_0 e l x_0 S$ et la densité de charge négative superficielle est

$$\sigma = -n_0 e l x_0 \quad (1)$$

Alors qu'une densité de charge positive

$$\sigma = n_0 e l x_0 \text{ apparaît également.}$$

Ces densités créent un champ électrique qui aura pour rôle de rétablir l'équilibre (neutre). Soit x l'écart à un instant quelconque. Les électrons sont soumis à chaque instant à un champ électrique qui est celui d'une condensation de charge superficielle

$$\sigma = n_0 e l x \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{n_0 e l x}{\epsilon_0}$$

et l'équation de leur mouvement est

$$m \ddot{x} = -e E = -n_0 e \frac{e^2}{\epsilon_0} x$$

Donc la solution est $x = x_0 \cos \omega t$ avec

$$\omega = \omega_p = \left(\frac{n_0 e^2}{m \epsilon_0} \right)^{1/2} \quad \text{la fréquence plasma.}$$

On voit donc d'après la formule $\omega_p = \frac{n_0}{\epsilon_0} \frac{1}{m}$ que ω_p est l'indice de grandeur de la distance de séparation des charges dans un plasma soumis à la seule action thermique.

§4.2.2 Onde électronique de plasma

L'opérateur thermique va permettre une propagation de l'oscillation de plasma. Dans ce cas, il faut ajouter le terme

$-v_{pe}$ à l'opérateur du mouvement (4.3.1). Dans ce cas, on aura donc une qui nous intéresse, $\gamma = 3$ ($\gamma = \frac{3kT}{m}$) donc

$$v_{pe} = 3kT_e v_{ne} = 3kT_e v(n_0 + n_1) = 3kT_e \frac{\partial n_1}{\partial x}$$

car n_0 est uniforme par hypothèse. L'équation linéarisée est alors

$$m n_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -en_0 E_1 - 3kT_e \frac{\partial n_1}{\partial x}$$

L'équation (4.8.1) devient

$$-im \omega n_0 v_1 = -en_0 E_1 - 3kT_e i k n_1$$

(4.8.2) et (4.8.3) n'étant pas modifiées, ie

$$-i\omega n_1 = -n_0 i k v_1 \quad (\text{continuité})$$

$$ik \epsilon_0 E_1 = -en_1 \quad (\text{Poisson})$$

Donc

$$im \omega n_0 v_1 = \left[en_0 \left(\frac{-e}{ik \epsilon_0} \right) + 3kT_e i k \right] n_1$$

$$= \left[en_0 \left(\frac{-e}{ik \epsilon_0} \right) + 3kT_e i k \right] \frac{i k n_0}{i \omega} v_1$$

donc

$$\omega^2 v_1 = \left(n_0 \frac{e^2}{m \epsilon_0} + 3 \frac{kT_e}{m} k^2 \right) v_1$$

cad

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \frac{3}{2} v_{th}^2 k^2$$

$$v_{th} = \sqrt{\frac{2kT_e}{m}} \quad \text{est la vitesse thermique}$$

de vitesse de groupe $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ et alors $\neq 0$. On a

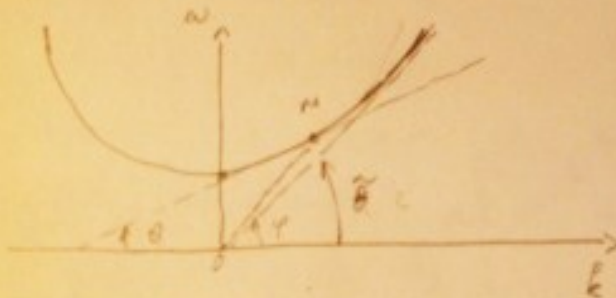
$$2\omega d\omega = 3v_H^2 k dk$$

$$\text{et } v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{3}{2} \frac{k}{\omega} v_H^2$$

avec $v_g = \frac{\omega}{k}$ vitesse de phase

$$v_g = \frac{3}{2} \frac{v_H^2}{v_g}$$

Le graphe de la relation de dispersion $\omega = \omega(k)$ est le suivant



$$v_g \neq 0; \quad v_g = v_g$$

$$k \rightarrow \infty \quad \omega \approx \frac{3}{2} v_H^2 k^2 \quad \text{et}$$

$$v_g \approx \sqrt{\frac{3}{2}} v_H$$

$$\frac{3}{2} \approx \frac{3}{2} \frac{v_H^2}{v_g} = \frac{\frac{3}{2} v_H^2}{\sqrt{\frac{3}{2}} v_H} = \sqrt{\frac{3}{2}} v_H = \frac{3}{2} v$$

La fréquence de ces oscillations est
dans le domaine de GHz

— N —

§4.2.3 Order acoustique

§4.4.1 Onde acoustique dans le gaz neutre
 dans le cas où on considère l'équation de Navier-Stokes (en négligeant la viscosité)

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p = -\frac{\partial p}{\partial \rho} \nabla \rho$$

L'équation de continuité est

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

En linéarisant ces équations au voisinage d'un équilibre statisme avec une pression uniforme p_0 et une densité uniforme ρ_0 , on a

$$-i\omega \rho_0 \vec{v}_1 = -\frac{\partial p_1}{\partial x_1} \vec{e}_1$$

$$-i\omega \rho_1 + \rho_0 \vec{k} \cdot \vec{v}_1 = 0$$

Si la dépendance spatio-temporelle des ondes est prise sous la forme $\exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t))$. Pour une onde plane avec $\vec{k} = k \vec{e}_1$ et $\vec{v} = v \vec{e}_1$ on obtient

$$-i\omega \rho_0 v_1 = -\frac{\partial p_1}{\partial x_1} \text{ et } \rho_0 i k v_1 = i\omega \rho_1$$

soit

$$\omega^2 v_1 = k^2 \frac{\partial p_1}{\partial x_1} v_1$$

ou bien

$$\frac{\omega}{k} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)^{1/2} = \left(\frac{\gamma k T}{M} \right)^{1/2} = c_s$$

c_s est la vitesse du son dans un gaz neutre
 Les ondes sont des ondes de premier longitudinal
 Dans le plasma, sans particules neutres et $\rho_0 \rightarrow \infty$
 dans le cas où les collisions sont faibles, on peut faire une
 analogie et parler d'ondes ioniques.

§ 4.2.4 Ondes ioniques

En l'absence de collisions, les ondes sonores ordinaires ne peuvent exister. Cependant, les ions peuvent transmettre des vibrations les uns aux autres à cause de leur charge et des ondes acoustiques peuvent exister par l'intermédiaire d'un champ électrique.

Comme on considère le mouvement des ions (de masse importante par rapport à celle des électrons) les oscillations sont de basse fréquence. Dans ce cas, l'ajustement des électrons pour avoir pour neutralité est parfaite et on peut utiliser l'approximation plane $n_i = n_e = n$ (ce qui n'est pas le cas pour des vibrations de haute fréquence électronique par exemple si les ions manifestent leur inertie).

En l'absence de champ magnétique, l'équation du mouvement des ions est

$$M n \left[\frac{dv_i}{dt} + (v_i \cdot \nabla) v_i \right] = e n E - \nabla p = -e n \nabla \phi - \gamma_i k T_i \nabla n$$

où $E = -\nabla \phi$. En linéarisant et en considérant des ondes planes, on a

$$-i \omega M n_0 v_i = -e n_0 i b \phi_i - \gamma_i k T_i i b n_i$$

on peut obtenir une relation entre n_i et ϕ_i

Pour des oscillations de basse fréquence, l'hypothèse d'un équilibre thermique pour les électrons est justifiée et

$$n = n_0 e^{(e\phi/kT)}$$

donc

$$n = n_0 \left(1 + \frac{e\phi}{kT_e} + \dots \right) = n_0 \left(1 + \frac{e\phi_0}{kT_e} + \frac{e\phi_1}{kT_e} + \dots \right)$$

En choisissant $E_0 = 0$ (et $\phi_0 = 0$), on peut en déduire

$$n_1 = n_0 \frac{e\phi_1}{kT_e}$$

L'équation de continuité linéarisée (pour les ions) est

$$i\omega n_i = n_0 i k v_{i1}$$

On obtient alors

$$i\omega H n_0 v_{i1} = \left(e n_0 i k \frac{kT_e}{n_0 e} + \gamma_i k T_i i k \right) n_0 \frac{i k v_{i1}}{i\omega}$$

Donc

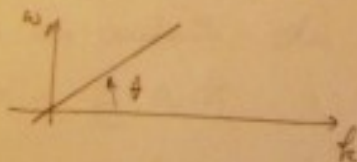
$$\omega^2 = k^2 \frac{1}{H} (kT_e + \gamma_i kT_i)$$

et v_{i1} la vitesse du son ionique est

$$v_{i1} = \frac{\omega}{k} = \left\{ \frac{1}{H} (kT_e + \gamma_i kT_i) \right\}^{1/2}$$

On a considéré ici des ondes de compression à une dimension
donc $\gamma_i = 3$ -

$$v_{i1} = \frac{1}{2} \frac{\omega}{k}$$



Les ondes de plasma ^{collectives} (ou ondes de Langmuir) sont des ondes de fréquence constante tandis que les ondes ioniques sont des ondes de fréquence constante et existent qu'à cause du mouvement thermique. - dans ce dernier cas $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\omega}{k} = v_T$

§4.2.5 Rôle de l'approximation plasma

dans la dérivation précédente, on a supposé $n_i = n_e = n$. Considérons $n_i \neq n_e$ et l'équation de Poisson ($E_0 = 0$)

$$\epsilon_0 \operatorname{div} E_1 = \epsilon_0 k^2 \phi_1 = e(n_i - n_e)$$

(linéarisée).

On a

$$n_e = \frac{e\phi_1}{kT_e} n_0$$

Donc

$$\epsilon_0 k^2 \phi_1 = e n_i - e \left(\frac{e\phi_1}{kT_e} \right) n_0 \Rightarrow e n_i = \left(\epsilon_0 k^2 + \frac{e^2}{kT_e} n_0 \right) \phi_1$$

Donc, comme

$$\frac{1}{\lambda_D^2} = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 kT_e}$$

où λ_D est la longueur de Debye

On a

$$\epsilon_0 \phi_1 \left(\frac{1}{\lambda_D^2} \lambda_D^2 + 1 \right) = e n_i \lambda_D^2$$

L'équation de continuité des ions (linéarisée) donne

$$n_i = \frac{k}{\omega} n_0 v_{Ti}$$

Donc

-49-

En utilisant l'équation du mouvement linéarisée

$$-i\omega M n_0 v_{i1} = -e n_0 i k \phi_1 - \gamma_i \kappa T_i i k n_{i1}$$

On en déduit

$$i\omega M n_0 v_{i1} = \left(\frac{e n_0 i k}{\epsilon_0} \frac{1}{1 + k^2 \lambda_D^2} + \gamma_i \kappa T_i i k \right) \frac{1}{\omega} k_0 v_{i1}$$

c'est à dire

$$\frac{\omega}{k} = \left(\frac{\kappa T_e}{M} \frac{1}{1 + k^2 \lambda_D^2} + \frac{\gamma_i \kappa T_i}{M} \right)^{1/2}$$

L'approximation $k = k_e$ a introduit une erreur d'ordre

$$k^2 \lambda_D^2 = \left(2\pi \frac{\lambda_D}{\lambda} \right)^2$$

$$\left(\lambda_D = 69 \left(\frac{T}{k_e} \right)^{1/2} \text{ nm}, T_{\text{ex}} \approx 4 \text{ eV} : n_e = 10^{10} \text{ cm}^{-3} = 10^{18} \text{ m}^{-3} \right)$$

$$T = 10^4 \text{ K} \quad \lambda_D = 69 \left(\frac{10^4}{10^{18}} \right)^{1/2} = 69 \cdot 10^{-6} \text{ m.}$$

L'approximation plasma est bonne sauf pour les très petites longueurs d'onde - si on considère ces très petites longueurs d'onde en prenant $\left(k = \frac{2\pi}{\lambda} \right)$

$$k^2 \lambda_D^2 \gg 1$$

l'équation précédente devient (car $T_i \ll T_e$ la même température)

$$\frac{\omega^2}{k^2} \approx \frac{\kappa T_e}{M} \frac{1}{1 + k^2 \lambda_D^2} \quad \text{Donc } \omega^2 \approx \frac{\kappa T_e}{\epsilon_0 M} = \omega_p^2$$

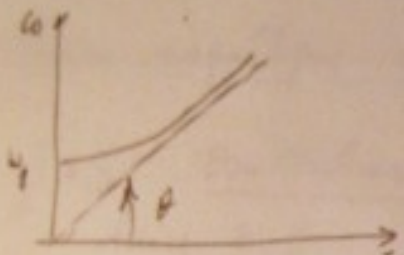
On a alors les représentations graphiques suivantes.

pour les relations de dispersion des ondes de plasma électroniques et des ondes ioniques

$$\kappa T = 1 \text{ eV} \rightarrow T = \frac{1.6 \cdot 10^{-19}}{1.38 \cdot 10^{-23}} = 11.600 \text{ K}$$

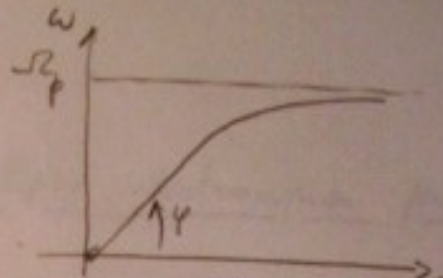
$$kT \rightarrow (0.1 \text{ eV} \rightarrow 10^6 \text{ eV}) \quad T \rightarrow (1000 \text{ K} \rightarrow 10^8 \text{ K})$$

-112-



ondes électroniques

$$\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{v_{ph}}{v_{th}}$$



ondes ioniques

$$\gamma = \alpha_3$$

— N —

§4.3 Champs magnétique non nul

§4.3.1 Oscillations électrostatiques électroniques perpendiculaires à B_0

Après tout, on a supposé que le champ magnétique B est nul. Quand un champ magnétique existe, de nombreuses autres types d'ondes peuvent exister. On se tient d'abord à considérer le cas d'oscillations électroniques électrostatiques de haute fréquence se propageant perpendiculairement au champ magnétique.

Précisons certains termes. Parallèle et perpendiculaire se réfèrent à la direction de k par rapport au champ magnétique non perturbé B_0 .

Longitudinal et transverse se réfèrent à la direction de k par rapport au champ électrique oscillant E_1 .

Si le champ oscillant B_1 est nul, l'onde est dite électrostatique; sinon elle est dite électromagnétique. Or, au 1^{er} ordre

$$\text{soit } E_z = -\dot{B}_1$$

ou bien

$$k \wedge E_1 = \omega B_1$$

Si l'onde est longitudinale, elle est nécessairement électrostatique. Sinon, elle est électromagnétique.

Considérons deux oscillations électroniques perpendiculaires à B_0 . On va supposer que les ions ont une inertie telle que leur mouvement peut être négligé aux hautes fréquences considérées. Ils forment alors un ensemble uniforme ($n_{i0} = \text{cte}$). On ne considère pas ici l'agitation thermique des électrons $kT_e = 0$.

L'équilibre est, comme on l'a déjà considéré, tel que n_0 et B_0 sont constants, $E_0 = v_0 = 0$. On a donc l'équation du mouvement des électrons, linéarisée

$$m \frac{dv_{e1}}{dt} = -e(E_{\eta} + v_{e1} \wedge B_0)$$

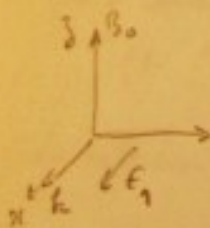
l'équation de continuité linéarisée

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + n_0 \operatorname{div} v_{e1} = 0$$

Puis on a écrit

$$\epsilon_0 \operatorname{div} E_{\eta} = -en_{e1}$$

Considérons des ondes longitudinales $k \parallel E_{\eta}$ (avec $B_{\eta} = 0$)
l'axe ox est choisi $\parallel \vec{k}$ et E_{η} , l'axe oz orienté B_0 .



$$E_{\eta} \equiv E$$

Donc

$$-i\omega m v_x = -eE - ev_y B_0$$

$$-i\omega m v_y = e v_x B_0$$

$$-i\omega m v_z = 0$$

-h.s.-

$$v_x = v_x(E)$$

Donc, en tirant v_y de la 2^e - équation et remplaçant dans la 1^{re} on a

$$i\omega m v_x = eE + eB_0 \frac{ieB_0}{m\omega} v_x$$

$$v_x = \frac{eE/im\omega}{1 - \omega_c^2/\omega^2}$$

Si $\omega \rightarrow \omega_c$, $v_x \rightarrow \infty$. On peut s'en convaincre par l'argument physique suivant : si les oscillations de E sont en phase avec le mouvement cyclotronique, le champ est accélératif après chaque rotation de Larmor et la vitesse croît (ici, on n'a pas considéré le terme $(v \cdot \nabla)v$ et la pression est nulle : toutes les particules se déplacent ensemble).

De l'équation de continuité, on tire

$$n_1 = \frac{k}{\omega} n_0 v_x$$

De Poisson, on tire

$$ik \epsilon_0 E = -e \left(\frac{k}{\omega} n_0 \right) \left(\frac{eE/im\omega}{1 - \omega_c^2/\omega^2} \right)$$

c'est à dire

$$(1 - \omega_c^2/\omega^2) E = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} E$$

$$\omega_p^2 = \left(\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m} \right) \quad k = k_0$$

la relation de dispersion est donc

$$\omega_c^2 = \frac{e^2 n^2}{m^2}$$

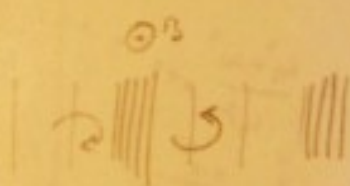
$$\omega^2 = \omega_p^2 + \omega_c^2 \equiv \omega_h^2$$

ω_h : fréquence hybride supérieure

21

C'est la fréquence des oscillations électroniques perpendiculaire à B_0 . Il est clair que les oscillations électroniques parallèles à B_0 se font à la fréquence ω_p , qui est indépendante du champ magnétique. Les particules en mouvement parallèle au champ B_0 ne voient pas ce champ (22.8.20)

La représentation graphique peut être alors la suivante. Dans un seul plan, représenté sur le dessin, il existe des zones élargies et à un déplacement important et des zones moins peuplées.



Par rapport à la situation $B=0$, il existe une force supplémentaire de rappel qui est la force de Lorentz. Les trajectoires deviennent alors des ellipses. Ceci implique

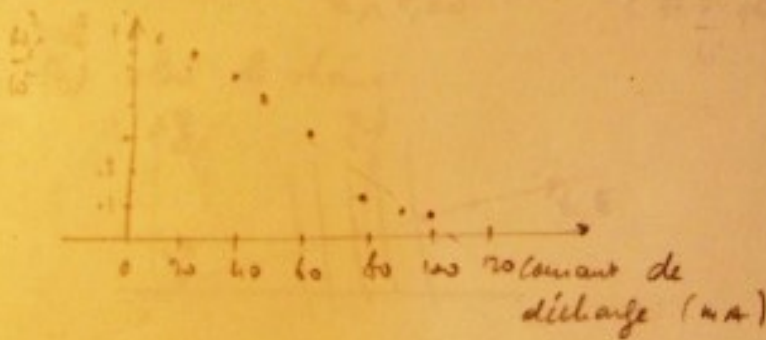
alors des oscillations plus rapides que celles s'effectuant à la fréquence plasma ω_p . Si $B \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow \omega_p$. Si la densité décroît vers zéro, E_1 tend vers zéro (Poincaré), ω_p tend vers zéro ($\omega_p = \frac{h e^2}{\epsilon_0 m}$) et on a des oscillations à la fréquence cyclotronique.

Vérification expérimentale - Dans une expérience de décharge, il est possible de rendre compte expérimentalement de la relation de dispersion pour les modes hybrides inférieurs

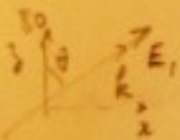
On considère des ondes micrométriques transmises perpendiculairement à un champ magnétique dans un plasma constitué lors de décharge. Quand la densité varie, la transmission à travers le plasma présente un pic même à la densité pour $\omega = \omega_h$. Ceci est dû au fait que la fréquence hybride est excitée, l'analyse étant prise au rayonnement entrant. On a

$$\omega^2 - \omega_c^2 = \frac{h^2}{80 m}$$

Le courant de décharge étant proportionnel à n , on a effectivement.



Q. 80 : Pour une propagation d'onde ^{électromagnétique} électrostatique faisant un angle quelconque par rapport à $\vec{B}$, on écrit



montrer que la relation de dispersion est

$$\omega^2(\omega^2 - \omega_h^2) + \omega_c^2 \omega_p^2 \cos^2 \theta = 0$$

($\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$) orthonormaux

§4.3.2 Ondes électrostatiques ioniques perpendiculaires à B

On va considérer à présent la propagation d'ondes acoustiques ioniques quand k est perpendiculaire à B_0 (ondes perpendiculaires). On va en fait considérer le cas où $(\vec{k}, \vec{B}_0) \approx \frac{\pi}{2}$ par des raisons expliquées un peu plus loin.

De nouveau, le plasma est supposé sans frontières, n_0 et B_0 sont constants, $v_0 = E_0 = 0$. De plus, on va considérer $T_i = 0$ (les ondes acoustiques existent pour $T_i = 0$) De plus, on va considérer les ondes électrostatiques. Or $(\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t})$
 $k_{\parallel} E_{\parallel} = 0$ c'est à dire $\vec{E} = -\nabla \phi$.

On obtient le schéma



$$\vec{E} = E_{\parallel}$$

Dans le même schéma on considère des ondes ioniques, si on tient compte du mouvement des ions, les fréquences considérées sont des basses fréquences.

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, les mouvements électroniques ne peuvent avoir lieu par les dérivées dues au champ E qui dans le plan xy (petits rayons de Larmor) $(\frac{E \wedge B}{B^2} = v_0)$ et donc les électrons ne peuvent annuler la neutralité électrique à la suite des oscillations de $k_{\parallel}$. L'analyse est donc plus complexe car l'approximation plasma n'est pas valable ($n_e \approx n_i$)

$k \approx \frac{\pi}{2}$, les électrons peuvent se déplacer le long de B_0
 et passer de régions à faible population ionique à des régions
 à forte population. L'approximation plasma est alors justifiée
 ici. On a

$$M \frac{\partial v_{ix}}{\partial t} = -e n \phi_1 + e v_{iy} B_0$$

Supposons des ondes planes se propageant H dans la direction x
 On a :

$$-i\omega M v_{ix} = -e n \phi_1 + e v_{iy} B_0 \quad k = k_x$$

$$-i\omega M v_{iy} = -e v_{ix} B_0$$

On obtient

$$v_{ix} = \frac{e k}{M \omega} \phi_1 \left(1 - \frac{\Omega_e^2}{\omega^2}\right)^{-1}$$

où $\Omega_e = \frac{e B_0}{M}$ est la fréquence cyclotron ionique.

L'équation de continuité des ions donne

$$n_{i1} = n_0 \frac{k}{\omega} v_{ix}$$

La relation de Boltzmann pour les électrons, sous forme linéaire
 est alors :

$$\frac{n_{e1}}{n_0} = \frac{e \phi_1}{k T_e} \quad \text{et } n_{i1} = n_{e1} \quad (n_{i1} = n_{e1})$$

On a donc

$$\left(1 - \frac{\Omega_e^2}{\omega^2}\right) v_{ix} = \frac{e k}{M \omega} \frac{k T_e}{e n_0} \frac{n_0 k}{\omega} v_{ix}$$

et

$$\omega^2 - \Omega_e^2 = k^2 \frac{k T_e}{M}$$

§4.4 Ondes électromagnétiques

4.4.1 Champs magnétique et électrique $B_0 \neq 0$, transverse
 On va étudier à présent des ondes transverses électromagnétiques $j=0$ pouvant se propager à travers un plasma à de faibles fréquences situées dans le domaine visible au radio.

(*) On effectue tout d'abord un rappel sur les ondes électromagnétiques. Le champ électromagnétique correspondant à l'équation du plasma est supposé nul et E_1, B_1 sont des perturbations (*).

Dans le vide (on considère $E \equiv E_1, B \equiv B_1$), on a

$$\text{rot } E_1 = -\frac{\partial B_1}{\partial t} \quad \text{rot } B_1 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_1}{\partial t} \quad (j=0)$$

donc, en prenant le rot de la 2^e équation

$$\text{rot}(\text{rot } B_1) = \frac{1}{c^2} \text{rot} \frac{\partial E_1}{\partial t} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_1}{\partial t^2}$$

En cherchant des solutions sous forme d'une équation

$$\Delta \vec{B}_1 = -k^2 \vec{B}_1 \quad (\vec{k} \cdot \vec{B}_1 = 0) \quad \Rightarrow \quad -k^2 \vec{B}_1 = -k^2 \vec{B}_1$$

$$\text{Donc } \Delta \vec{B}_1 = -k^2 \vec{B}_1 = 0 \quad \text{ou } a$$

$$\omega^2 = k^2 c^2$$

$$c = \frac{\omega}{k} \quad \text{vitesse de phase (vitesse de la lumière)}$$

Dans un plasma avec $B_0 = 0, E_0 = 0$, on a $j \neq 0$ et on linéarise $j_1 \neq 0$

$$\text{rot } B_1 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_1}{\partial t} + \mu_0 j_1$$

$$\text{Donc } c^2 \text{rot} \left(\frac{\partial B_1}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial j_1}{\partial t}$$

Donc part, en posant le rot de $(\text{rot } \vec{E}_1 = -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t})$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{E}_1) = \text{grad}(\text{div } \vec{E}_1) - \Delta \vec{E}_1 = -\text{rot} \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t}$$

Donc

$$-k(k \cdot \vec{E}_1) + k^2 \vec{E}_1 = + \frac{1}{c^2} \omega^2 \vec{E}_1 + \frac{i\omega}{\epsilon_0 c^2} \vec{j}_1$$

Pour des ondes transverses $k \cdot \vec{E}_1 = 0$

Donc

$$\boxed{\vec{E}_1 (k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}) = + \frac{i\omega}{\epsilon_0 c^2} \vec{j}_1}$$

On se retrouve ici pour des ondes de très haute fréquence. Dans ce cas, les ions peuvent être considérés comme ne variant pas la population des ondes, une leur inertie et sont considérés comme fixes.

Le courant $\vec{j}_1$ est alors dû aux électrons

$$\vec{j}_1 = -n_0 e \vec{v}_1$$

$$\boxed{P_{\text{ion}} = 0}$$

on a

$$m \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -e \vec{E}_1$$

$$-e \left(\underbrace{v_0 \times B_1}_{v_0 \times B_1} + \underbrace{v_1 \times B_0}_{0 \propto B_0} + \underbrace{v_1 \times B_1}_{v_1 \times B_1} \right)$$

$$\text{et } \vec{v}_1 = \frac{e \vec{E}_1}{i m \omega}$$

$$\begin{aligned} \text{On a alors } \vec{E}_1 (k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}) &= + \frac{i\omega}{\epsilon_0 c^2} (n_0 e) \left(\frac{e \vec{E}_1}{i m \omega} \right) \\ &= - \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 c^2 m} \vec{E}_1 = - \frac{\omega_p^2}{c^2} \vec{E}_1 \end{aligned}$$

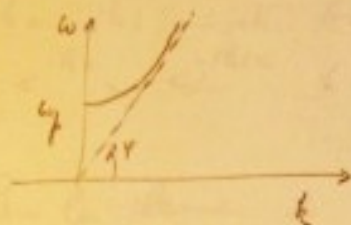
Donc

$$\boxed{\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2}$$

C'est la relation de dispersion pour des ondes transverses électromagnétiques.

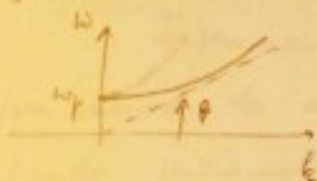
La vitesse de phase v_p de telles ondes est

$v_p = \frac{\omega}{k} > c$
 mais la vitesse de groupe $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{kc^2}{\sqrt{\omega_p^2 + k^2 c^2}} = \frac{kc^2}{\omega} = \frac{c^2}{v_p}$



$\omega \gg k^2 c^2 \quad \int dk$
 $\frac{\omega}{k} \approx \frac{c^2}{v_p} = c$

Regardons des ondes de plasma électroniques, on avait



$\omega^2 = \omega_p^2 + \frac{1}{2} k^2 v_{th}^2$
 $\frac{1}{2} v_{th} = \sqrt{\frac{1}{2}} v_{th}$

mais $c \gg v_{th}$

Notion de coupure (Cutoff) Mesure expérimentale de la densité d'un plasma.

Une onde électromagnétique dans le domaine de fréquence que nous avons considérée est envoyée dans un plasma, avec une pulsation ω , la longueur d'onde

$\lambda = \frac{2\pi}{k}$ sera telle que la relation

$\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2 \quad \omega_p^2 = \frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m}$

soit vérifiée - la densité

n_e croît, et ω_p^2 se diminue et augmente - la perméabilité relative pour $\omega = \omega_p$ la densité alors est dite critique et vaut

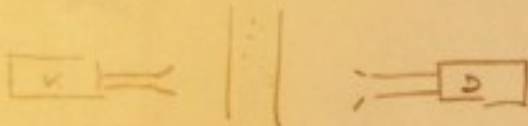
$n_c = \epsilon_0 \frac{\omega^2}{e^2}$

Si $n > n_c$, la relation $\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2$ ω peut être
vérifiée par le réel car $\omega^2 - \omega_p^2 = \omega^2 - \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m} > 0$
il doit être alors imaginaire $\left(\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m} - \frac{\epsilon_0 \omega^2}{\epsilon_0 m} \right)$
 $k = i|\kappa|$ et l'onde est amortie

$$e^{i k x} = e^{-|\kappa| x} \equiv e^{-x/\delta} \quad \text{si} \quad \delta = |\kappa|^{-1} = \frac{c}{(\omega_p^2 - \omega^2)^{1/2}}$$

Pour les plasmas de laboratoire, la fréquence de coupure
se situe dans le domaine micrométrique.

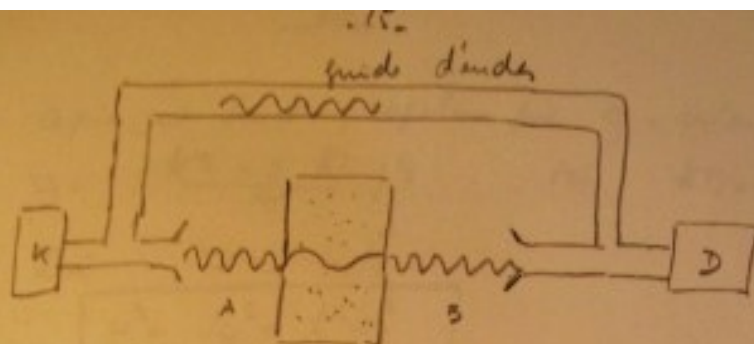
Expérimentalement, on utilise cette propriété
pour mesurer la densité d'un plasma. Un faisceau
d'onde micrométrique est produit par un télescope
à haute fréquence d'onde et envoyé sur le plasma.
Le faisceau transmis est recueilli dans un détecteur
à l'aide d'un autre guide d'onde.



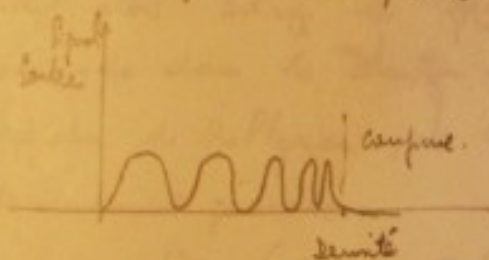
Si la fréquence de télescope
varie, le signal de l'onde
disparaît si la condition

$$n = \frac{n_0 \epsilon_0 \omega^2}{c^2} \text{ est vérifiée}$$

De manière plus précise, on utilise une antenne d'interfero-
mètre de Michelson pour mesurer la densité. Le signal
d'un télescope est divisé en deux parties; l'une se propage
en dehors du plasma et renvoie sur un détecteur,
l'autre traverse le plasma.



En l'absence de plasma, on dispose de déphasage pour que les 2 signaux soient de phase opposée - Le signal décalé est alors nul. Quand on envoie le plasma, le déphasage n'est plus de 180° et un signal en sortie est non nul. Quand on varie, le signal passe par des maximum chaque fois que les 2 signaux sont en phase jusqu'à ce que la densité critique est atteinte pour laquelle le rayonnement est complètement réfléchi. On obtient ainsi un système de franges à l'approche de la densité



Réflexion des ondes radio par l'ionosphère.

Quand des ondes radio (ondes) atteignent des altitudes suffisamment hautes de l'ionosphère ou la densité du plasma constituant cette ionosphère est suffisamment grande, ces ondes sont réfléchies.

- k20 -

On peut écrire, rappelons que v_z = vitesse du son dans le plasma

$$v_z = \left(\frac{kT_e + \gamma_i kT_i}{M} \right)^{1/2} \quad \text{ici} \quad kT_i = 0$$

Donc

$$\boxed{\omega^2 = \omega_c^2 + k^2 v_z^2}$$

C'est la relation de dispersion pour les ondes électrostatiques ioniques. Ici, aussi, la présence du champ magnétique a pour rôle d'ajouter une force de rappel de Lorentz aux oscillations de type acoustique, donc les oscillations sont de fréquence plus grande que celles données par $\frac{\omega^2}{k^2} = v_z^2$

fréquence hybride basse.

On va considérer le cas où $\theta = \frac{\pi}{2}$. Les électrons, ne peuvent alors annuler la neutralité électrique en se déplaçant perpendiculairement à la direction du champ. Ils leur de vérifier l'équation de Boltzmann, ils doivent vérifier l'équation de mouvement générale

$$m \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v \right) = qn (E + v \times B) - \nabla p$$

On va considérer $T_e = 0$ et donc $p_e = 0$

Pour les ions, on a toujours

$$v_{ix} = \frac{ek}{M\omega} \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)^{-1}$$

$e \rightarrow -e$, $M \rightarrow m$, $\omega_c \rightarrow -\omega_c$, on obtient donc comme solution de 0 pour les électrons

$$v_{ex} = -\frac{ek}{m\omega} \phi_1 \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1}$$

les équations de continuité donnent

$$n_i = i_0 \frac{k}{\omega} v_{i1}$$

$$n_e = n_0 \frac{k}{\omega} v_{e1}$$

l'équation de Poisson donne $\epsilon_0 \text{div } E = e(n_i - n_e) = \epsilon_0 k^2 \phi_1$

d'où

$$\epsilon_0 k^2 \phi_1 = n_0 e \frac{k}{\omega} \left\{ \frac{ek}{M\omega} \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} \phi_1 - \frac{ek}{m\omega} \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} \right\} \phi_1$$

$$\epsilon_0 \omega^2 = n_0 e^2 \left\{ \frac{1}{M \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)} - \frac{1}{m \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)} \right\}$$

$$\omega_p^2 = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 M} \quad (\text{fréquence plasma ionique})$$

$$\text{On a } n \omega^2 = \frac{e^2 B^2}{m}$$

$$\omega_c \ll \omega$$

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega_c^2} + \frac{1}{\omega_p^2}$$

$$M \omega_c^2 = \frac{e^2 B^2}{M}$$

$$\omega^2 = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 M \left(1 - \omega_c^2/\omega^2\right)} - \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m \left(1 - \omega_c^2/\omega^2\right)}$$

$$\omega^2 = \frac{\omega_p^2}{\left(1 - \omega_c^2/\omega^2\right)} - \frac{\omega_p^2}{\left(1 - \omega_c^2/\omega^2\right)}$$

ω_p

$$\omega^2 = \frac{\omega_p^2 (1 - \omega_c^2/\omega^2) - \omega_p^2 (1 - \omega_c^2/\omega^2)}{(1 - \omega_c^2/\omega^2)(1 - \omega_c^2/\omega^2)}$$

Un autre aspect de la transmission, par le biais, s'étend
autour de la terre $h \approx 10^{12} \text{ m}^{-3}$, $f_c \approx 10 \text{ MHz}$

Pour communiquer avec des véhicules spatiaux, il faut
des fréquences plus élevées que celle-ci pour pénétrer dans
l'atmosphère

Cependant, lors du retour, un plasma est créé
autour du véhicule par les frottements internes qui créent
un phénomène de cutoff.

4.4.2 Formulation tensorielle et relation de dispersion générale ($B_0 \neq 0$)

Si un champ magnétique B_0 est présent dans le plasma,
celui-ci devient anisotrope. La formulation tensorielle s'avère
plus utile pour décrire cette anisotropie. On considère
ici d'abord les équations de Maxwell

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j}$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{ou } \vec{j} = \vec{\sigma} \cdot \vec{E}$$

$\vec{\sigma}$ étant un tenseur du 2nd ordre.

On obtient donc, par des calculs, en des plans, le système

$$(1.1) \quad i\hbar \nabla \cdot \vec{E} = \omega B \quad (-1(-i))$$

$$(1.2) \quad (1) \hbar \nabla B = (-i) \frac{\omega}{c^2} \vec{E} + \mu_0 \vec{\sigma} \cdot \vec{E}$$

$$(1.3) \quad i\hbar \cdot \vec{E} = \frac{\hbar^2}{\mu_0}$$

$$(1.4) \quad \hbar \cdot B = 0$$

La 2^e relation s'écrit $\hbar \nabla B = -\frac{\omega}{c^2} \left(1 + \frac{i}{\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}} \right) \vec{E}$

$$(1.5) \quad = -\frac{\omega}{c^2} \vec{\sigma} \cdot \vec{E}$$

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{E} = \left(\frac{1 + i \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}}{\omega \mu_0} \right)$$

L'élimination de B entre (1.2.1) et (1.2.5) donne

$$\frac{1}{\omega} \hbar \nabla (\hbar \nabla) = -\frac{\omega}{c^2} \vec{\sigma} \cdot \vec{E}$$

Comme

$$\hbar \nabla (\hbar \nabla) = -\hbar^2 \vec{E} + (\hbar \otimes \hbar) \cdot \vec{E}$$

On a

$$-\hbar^2 \vec{E} + (\hbar \otimes \hbar) \cdot \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{\sigma} \cdot \vec{E} = \vec{D} \cdot \vec{E} = 0$$

L'annulation du déterminant du tenseur va donner la condition de compatibilité qui sera la relation de dispersion. En effet, si on propose

$$\partial_x \epsilon_x + \partial_y \epsilon_y + \partial_z \epsilon_z = 0$$

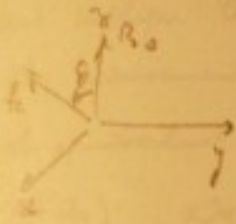
$$\partial_x \epsilon_x + \partial_y \epsilon_y + \partial_z \epsilon_z = 0$$

$$\partial_x \epsilon_x + \partial_y \epsilon_y + \partial_z \epsilon_z = 0$$

Donc la condition $\boxed{\det D = 0}$ pour une solution non nulle du système

Détermination de $\vec{D}$

Cas d'une onde avec $(\vec{k}, \vec{E}_0) = \theta$



$$k_x = k \sin \theta, \quad k_z = k \cos \theta, \quad k_y = 0$$

$$k \otimes k = \begin{pmatrix} k^2 \sin^2 \theta & 0 & k^2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 \\ k^2 \sin \theta \cos \theta & 0 & k^2 \cos^2 \theta \end{pmatrix}$$

Alors

$$\vec{D} = \frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} + \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \sin^2 \theta, & \epsilon_{xy}, & \epsilon_{xz} + \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \sin \theta \cos \theta \\ \epsilon_{yx}, & \epsilon_{yy} - \frac{k^2 c^2}{\omega^2}, & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} + \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \sin \theta \cos \theta, & \epsilon_{zy}, & \epsilon_{zz} - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} + \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \cos^2 \theta \end{pmatrix}$$

On appelle $N = \frac{kc}{\omega}$ l'indice de propagation.

$$\vec{D} = \frac{\omega^2}{c^2} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} - N^2 \cos^2 \theta, & \epsilon_{xy}, & \epsilon_{xz} + N^2 \sin \theta \cos \theta \\ \epsilon_{yx}, & \epsilon_{yy} - N^2, & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} + N^2 \sin \theta \cos \theta, & \epsilon_{zy}, & \epsilon_{zz} - N^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

La détermination de $\vec{D}$ nécessite la détermination du tenseur de conductivité $\vec{\sigma}$ qui dépend de la dynamique des particules

Tenseur de conductivité

Pour déterminer le tenseur $\vec{\sigma}$, on va considérer le cas où on peut négliger les gradients de pression dans les équations du mouvement des ions et des électrons ou ce qui est équivalent, on considère T_e, T_i faibles (Plasmas froids). De même, les termes (v.D) et seront négligés. On peut considérer comme des termes d'ordre supérieur :

On rappelle, pour chaque espèce, dans chaque champ magnétique, une densité

à l'ordre zéro	$E_0 = 0$	$B_0 // O_z$	0	n_0
à l'ordre un	E_1	B_1	v_1	n_1

Les équations du mouvement pour chaque espèce, avec

$$v_{0x} \equiv v_x, E_1 \equiv E, B_1 \equiv B, n_{1x} \equiv n_x$$

$$(1.10) \quad \frac{\partial v_{0x}}{\partial t} = -i\omega v_{0x} = \frac{q_x}{m_x} (E_x + v_{0y} B_0) = \frac{q_x}{m_x} E_x + i\omega_{cx} v_{0y}$$

$$(1.11) \quad \frac{\partial v_{0y}}{\partial t} = -i\omega v_{0y} = \frac{q_x}{m_x} (E_y - v_{0x} B_0) = \frac{q_x}{m_x} E_y - i\omega_{cx} v_{0x}$$

$$(1.12) \quad \frac{\partial v_{0z}}{\partial t} = -i\omega v_{0z} = \frac{q_x}{m_x} E_z$$

$$E_x = \pm 1 \cdot 10^{10} \text{ V/m}$$

$$\text{car } \omega_{ca} = \frac{|q| B_0}{m_a}$$

De (5.2.8) et (5.2.7),

$$\begin{cases} -i\omega v_{xa} - \xi_a \omega_{ca} v_{ya} = \frac{q_a}{m_a} E_x \\ \xi_a \omega_{ca} v_{xa} - i\omega v_{ya} = \frac{q_a}{m_a} E_y \end{cases}$$

On tire

$$v_{xa} = \frac{q_a}{m_a} \frac{\begin{pmatrix} E_x & -\xi_a \omega_{ca} \\ E_y & -i\omega \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -\omega^2 + \omega_{ca}^2 \end{pmatrix}} = -\frac{q_a}{m_a} \frac{(-i\omega E_x + \xi_a \omega_{ca} E_y)}{(\omega^2 - \omega_{ca}^2)}$$

$$v_{ya} = \frac{q_a}{m_a} \frac{\begin{pmatrix} -i\omega & E_x \\ \xi_a \omega_{ca} & E_y \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -\omega^2 + \omega_{ca}^2 \end{pmatrix}} = +\frac{q_a}{m_a} \frac{(+i\omega E_y + \xi_a \omega_{ca} E_x)}{(\omega^2 - \omega_{ca}^2)}$$

de sorte de courant et, au 1^{er} ordre,

$$\vec{j} = \sum_a n_a^{(0)} q_a \vec{v}_a = \vec{\sigma} \cdot \vec{E}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} j_x &= \sigma_{xx} E_x + \sigma_{xy} E_y + \sigma_{xz} E_z \\ &= \sum_a n_a^{(0)} q_a v_{xa} \\ &= \sum_a n_a^{(0)} q_a \left(-\frac{q_a}{m_a} \right) \frac{(-i\omega E_x + \xi_a \omega_{ca} E_y)}{(\omega^2 - \omega_{ca}^2)} \end{aligned}$$

Rappelons que la fréquence plasma pour l'espèce α est

$$\omega_{pa}^2 = \frac{n_a^{(0)} e^2}{\epsilon_0 m_a}$$

$$j_x = \sum_a -\epsilon_0 \omega_{pa}^2 \left(\frac{-i\omega E_x + \xi_a \omega_{ca} E_y}{\omega^2 - \omega_{ca}^2} \right)$$

Donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \epsilon_0 \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \frac{i\omega}{(\omega^2 - \omega_{c\alpha}^2)} \\ \sigma_{xy} = -\epsilon_0 \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \frac{\epsilon_{\alpha} \omega_{c\alpha}}{\omega^2 - \omega_{c\alpha}^2} \end{array} \right. \quad \sigma_{xz} = 0$$

Pour j_y , on a

$$j_y = \sum_{\alpha} n_{\alpha}^0 q_{\alpha} \left[\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left(\frac{i\omega E_y + \epsilon_{\alpha} \omega_{c\alpha} E_x}{\omega^2 - \omega_{c\alpha}^2} \right) \right] \quad \omega_{p\alpha}^2 = \frac{n_{\alpha}^0 e^2}{\epsilon_0 m_{\alpha}}$$

Donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{yx} = \epsilon_0 \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \frac{\epsilon_{\alpha} \omega_{c\alpha}}{\omega^2 - \omega_{c\alpha}^2} \\ \sigma_{yy} = \epsilon_0 \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \frac{i\omega}{\omega^2 - \omega_{c\alpha}^2} \end{array} \right. \quad \sigma_{yz} = 0$$

Enfin

$$j_z = \sum_{\alpha} n_{\alpha}^0 q_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha} (-i\omega)} E_z$$

$$\sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0 \quad \sigma_{zz} = \epsilon_0 \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \frac{i}{\omega}$$

La relation de dispersion s'écrit donc avec $\vec{E} = 1 + \frac{i}{\epsilon_0 \omega} \vec{\sigma}$
 $\vec{E}$ donné par (5.2.7) (5.2.8) (5.2.9) et $\vec{D}$ donné par
 (5.2.6)

$$\begin{array}{l}
 \text{[} \Phi \text{]} \\
 \begin{array}{l}
 \frac{\omega^2}{\omega^2} \text{ Det} \\
 \frac{1}{\omega^2}
 \end{array}
 \end{array}
 \left[
 \begin{array}{ccc}
 -N^2 \sin^2 \theta + 1 + i \sum_n \frac{\omega_p^2}{\omega} \frac{i}{(\omega^2 - \omega_{cn}^2)} & , & -i \sum_n \frac{\omega_p^2}{\omega} \frac{\xi_n \omega_{cn}}{\omega^2 - \omega_{cn}^2} & , & N^2 \sin \theta \cos \theta \\
 i \sum_n \frac{\omega_p^2}{\omega} \frac{\xi_n \omega_{cn}}{\omega^2 - \omega_{cn}^2} & , & 1 + i \sum_n \frac{\omega_p^2}{\omega} \frac{i}{(\omega^2 - \omega_{cn}^2)} - N^2 & , & 0 \\
 N^2 \sin \theta \cos \theta & , & 0 & , & -N^2 \sin^2 \theta + 1 + i \sum_n \frac{\omega_p^2}{\omega} \frac{i}{\omega^2}
 \end{array}
 \right]$$

= 0

En effet, les équations pour E_x et E_y s'écrivent, avec D

$$D = \begin{pmatrix} a & -ib & 0 \\ ib & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a E_x - ib E_y = 0 & 1) \\ ib E_x + a E_y = 0 & 2) \end{cases} \quad (i)$$

En multipliant 1) par i et en faisant la somme et la diff

$$\begin{cases} a(E_x + i E_y) - b(E_x + i E_y) = 0 \\ a(E_x - i E_y) + b(E_x - i E_y) = 0 \end{cases}$$

$$a = b \quad \text{pour } k = k_- (h_-)$$

$$a = -b \quad \text{pour } k = k_+ (h_+)$$

$$a = -k^2 + 1 = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2}; \quad b = \frac{\omega_{pe}}{\omega} \frac{\omega_{ce}}{\omega^2 - \omega_{ce}^2}; \quad c = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}$$

$$a = b \Rightarrow -\frac{k_-^2}{\omega^2} + 1 = \frac{\omega_{pe}}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} = \frac{\omega_{pe}}{\omega} \frac{\omega_{ce}}{\omega^2 - \omega_{ce}^2}$$

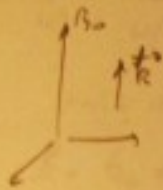
$$\frac{k_-^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{pe}}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} + \frac{\omega_{pe} \omega_{ce}}{\omega(\omega^2 - \omega_{ce}^2)} = 1 - \frac{\omega_{pe}}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} \left(1 - \frac{\omega_{ce}}{\omega}\right)$$

$$= \frac{k_+^2}{\omega^2}$$

idem pour k_+

$k_0 = b$ (k_-) alors $E_x = +i E_y$ et l'onde se circule à gauche
 $k_0 = -b$ (k_+) — $E_x = -i E_y$ — — — — — droite

Cas d'une onde électromagnétique parallèle à B_0



Alors $\theta = 0$ les électrons seuls sont
mobiles (haute fréquence), on a : avec
 $N = \frac{kc}{\omega}$

$$\text{Det} \begin{pmatrix} -\frac{k^2 c^2}{\omega^2} + 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 - \omega_{ce}^2)} & -i \frac{\omega_{pe}^2}{\omega} \frac{(-)\omega_{ce}}{(\omega^2 - \omega_{ce}^2)} & 0 \\ i \frac{\omega_{pe}^2}{\omega} \frac{(-)\omega_{ce}}{(\omega^2 - \omega_{ce}^2)} & 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \end{pmatrix} = 0$$

Cela donne

$$\left\{ \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 - \omega_{ce}^2)} - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right)^2 - \frac{\omega_{pe}^4 \omega_{ce}^2}{\omega^2 (\omega^2 - \omega_{ce}^2)^2} \right\} \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right) = 0$$

$$\left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{ce}^2}{\omega (\omega^2 - \omega_{ce}^2)} \right) \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 - \omega_{ce}^2)} - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{ce}^2}{\omega (\omega^2 - \omega_{ce}^2)} \right) \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right)$$

$$0 = \left(1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 - \omega_{ce}^2)} \left(1 + \frac{\omega_{ce}}{\omega} \right) \right) \left(1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 - \omega_{ce}^2)} \left(1 - \frac{\omega_{ce}}{\omega} \right) \right) \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right)$$

-14-

du même

$$\left(1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - \omega_{ce})}\right) \left(1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega + \omega_{ce})}\right) \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right) = 0$$

on a donc

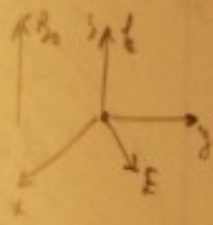
$$k = k_+ = \frac{\omega}{c} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - \omega_{ce})}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$k = k_- = \frac{\omega}{c} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega + \omega_{ce})}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Polarisation circulaire

Considérons le cas d'ondes transverses $k \perp E$ $k \parallel B_0$

(d'où $E_z = 0$)



Les équations

$$\partial_{xx} E_x + \partial_{yy} E_y = 0 \quad c)$$

$$\partial_{yx} E_x + \partial_{yy} E_y = 0 \quad b)$$

soit $\partial_{yx} = -\partial_{xy}$, $\partial_{xx} = \partial_{yy}$, indiquent que les deux types d'onde pour k_+ et k_- sont polarisés circulairement.



$$\partial_{xx} E_x + \partial_{yy} E_y = 0$$

$$-\partial_{xy} E_x + \partial_{yy} E_y = 0$$

$$\partial_{xx} E_x - \partial_{yy} E_y = 0$$

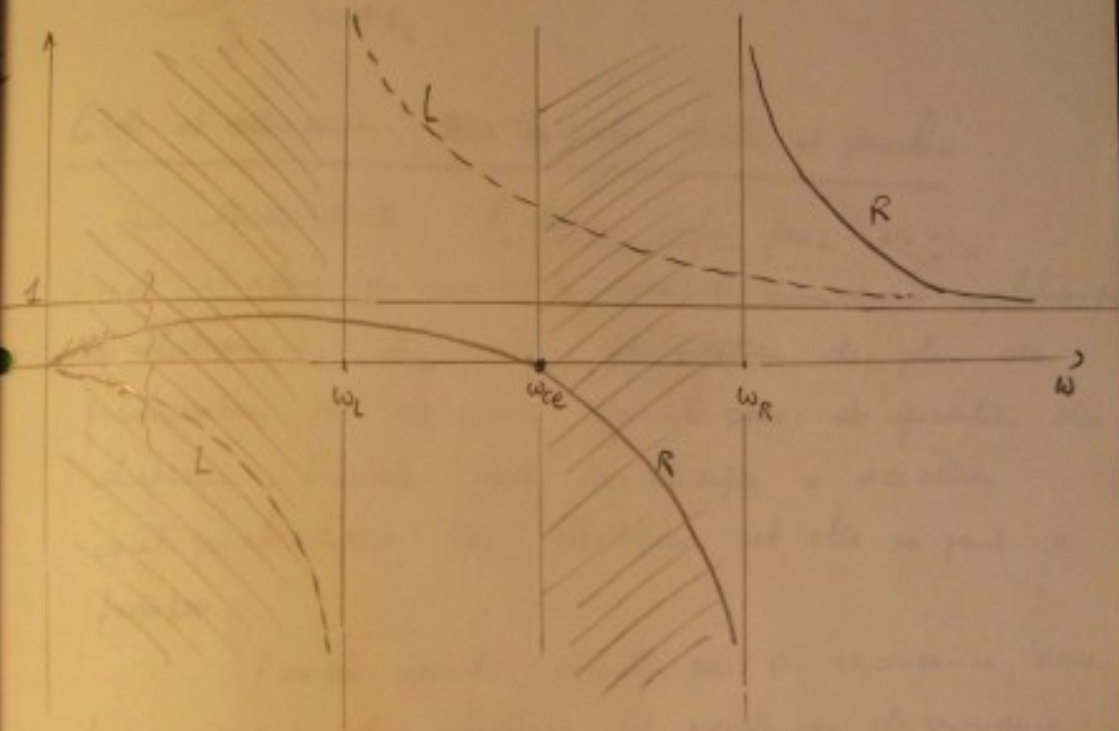
$$-\partial_{xy} E_x - \partial_{yy} E_y = 0$$

$$\partial_{xx} E_x = i \partial_{yy} E_y \quad et$$

$$E_x = \pm i E_y$$

-17-

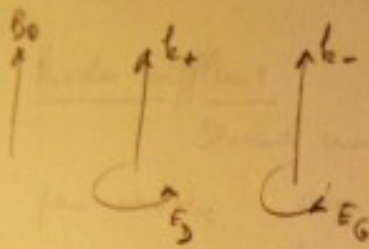
On a tracé un diagramme de dispersion, $\frac{\omega^2}{c^2 k^2} = \frac{1}{N^2}$ en fonction de ω ; $\frac{1}{N^2} = \frac{v_g^2}{c^2}$



$R \equiv$ onde droite (right)

$L \equiv$ — gauche (left)

La figure indiquée III correspond à une région où la propagation de l'onde droite est impossible ($\frac{\omega^2}{c^2 k^2} < 0$). La région III correspond à une région où la propagation de l'onde gauche est impossible.



Cut-offs et résonance pour les ondes droite et gauche.

Pour l'onde droite, k devient infini pour $\omega = \omega_{ce}$.
 L'onde est alors en résonance avec le mouvement cyclotronique des électrons. Le sens de rotation du plan de polarisation est le même que le sens de rotation des électrons. L'onde perd son énergie à accélérer continuellement les électrons et elle ne peut se propager.

L'onde gauche n'entre pas en résonance avec le mouvement des électrons. Il n'y a pas de résonance pour cette onde pour $\omega > 0$.

Les cut-offs (ou cut-offs) sont obtenus en prenant $k=0$ dans les expressions (i.10) et (i.11) i.e.

$$\omega_{pe}^2 = \omega^2 \mp \omega \omega_{ce} \quad \begin{matrix} (-) & \text{onde droite} \\ (+) & \text{onde gauche} \end{matrix}$$

Les racines sont alors, (racines > 0)

$$\omega_R = \frac{1}{2} \left[\omega_{ce} + (\omega_{ce}^2 + 4\omega_{pe}^2)^{1/2} \right] \quad \text{pour onde droite}$$

$$\omega_L = \frac{1}{2} \left[-\omega_{ce} + (\omega_{ce}^2 + 4\omega_{pe}^2)^{1/2} \right] \quad \text{pour onde gauche}$$

Mode siffleur

Il existe une zone de propagation pour l'onde droite pour $\omega < \omega_{ce}$, avec $\frac{1}{N^2} < 1$ ie ω_{cc} - l'onde dans ce domaine de basse fréquence est appelée le mode siffleur.

Dans les premières recherches sur les courants de vortices on était intrigué par des sons stridents produits par certains phénomènes d'origine encore inconnus dans le domaine des fréquences audibles.

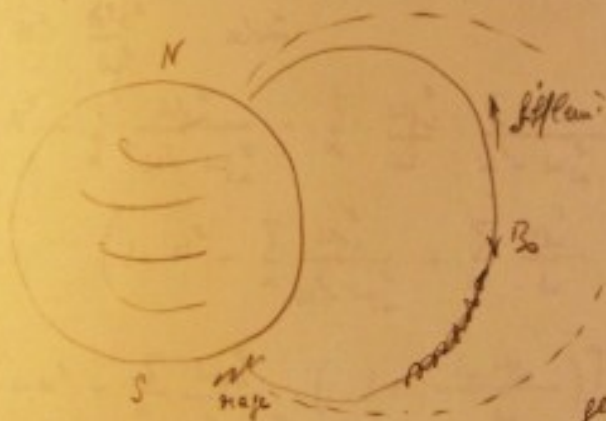
Ce phénomène peut être interprété en terme d'ondes droite dont il a été question - grand' des ondes sont produites dans l'hémisphère Sud, on trouve parfois de

plusieurs fréquences et produit.

Parmi les ondes produites dans le plasma

ionosphériques, il existe des ondes droite se propageant le long du champ

magnétique terrestre. Ces ondes sont guidées par le champ magnétique terrestre et sont détectées dans l'hémisphère Nord. On peut montrer que la vitesse de groupe de ces ondes croît avec la fréquence. Dans les bandes fréquentielles au-dessus plus tard. L'âge finit constant. Des bruits radio sont détectés avec des fréquences décroissant au cours du temps.



§ 4.5 Ondes d'Alfven

On va considérer à présent, en utilisant les résultats précédents, le cas de basse fréquence dans l'expression générale Φ où on examine le cas d'une propagation parallèle $\vec{k} \parallel \vec{B}_0$ et transverse ($\vec{a} \perp \vec{B}_0$)

Dans ce cas, il faut tenir compte du mouvement des ions et des électrons. On a alors, dans ondes polarisées circulairement

$$\left(1 - \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2} \right) \left[\left(1 - N^2 - \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2 - \omega_{ca}^2} \right)^2 - \left(\sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega} \frac{\epsilon_a \omega_{ca}}{\omega^2 - \omega_{ca}^2} \right)^2 \right] = 0$$

$$N^2 = \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \quad \text{dans}$$

$$\left(1 - N^2 - \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2 - \omega_{ca}^2} - \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega} \frac{\epsilon_a \omega_{ca}}{\omega^2 - \omega_{ca}^2} \right) \times$$

$$\left(1 - N^2 - \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2 - \omega_{ca}^2} + \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega} \frac{\epsilon_a \omega_{ca}}{\omega^2 - \omega_{ca}^2} \right) = 0$$

$$= \underbrace{\left(1 - N^2 - \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2 - \omega_{ca}^2} \right)}_{\omega \rightarrow k_-} \left(1 + \frac{\epsilon_a \omega_{ca}}{\omega}\right) \underbrace{\left(1 - N^2 - \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2 - \omega_{ca}^2} \right)}_{=0 \Rightarrow k_+} \left(1 - \frac{\epsilon_a \omega_{ca}}{\omega}\right) = 0$$

$$k_{\pm}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \left(\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} \left(1 \pm \frac{\omega_{ce}}{\omega}\right) + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{ci}^2} \left(1 \pm \frac{\omega_{ci}}{\omega}\right) \right) \right]$$

$$k_{\pm} = \frac{\omega}{c} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega \pm \omega_{ce})} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega(\omega \pm \omega_{ci})} \right]^{1/2}$$

Dans la limite des très basses fréquences

$$\omega \ll \omega_{ci} \ll \omega_{ce}$$

on a, pour un plasma neutre avec

$$\omega_{ci} \omega_{pe}^2 = \omega_{ce} \omega_{pi}^2$$

$$\frac{e B}{m} \frac{e e^2}{\epsilon_0 m} = \frac{e B}{m} \frac{n_i e^2}{\epsilon_0 M}$$

$$\omega_{pe}^2 = \frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m}$$

$$\omega_{pi}^2 = \frac{n_i e^2}{\epsilon_0 M}$$

les expressions suivantes pour $k_{\pm}$

$$\omega_{ce} = \frac{e B}{m}$$

$$\omega_{ci} = \frac{e B}{M}$$

$$k_{\pm} = \frac{\omega}{c} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2 (\omega \mp \omega_{ci}) + \omega_{pi}^2 (\omega \pm \omega_{ce})}{\omega (\omega \pm \omega_{ce}) (\omega \mp \omega_{ci})} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\omega}{c} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2 \mp \omega_{pi}^2}{\omega (\pm \omega_{ce} \mp \omega_{ci})} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\omega}{c} \left[1 + \frac{\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2}{\omega_{ce} \omega_{ci}} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\omega}{c} \left[1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}} \left(\frac{1}{\omega_{ci}} + \frac{1}{\omega_{ce}} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\omega}{c} \left[1 + \frac{e e^2 n_i}{\epsilon_0 m e B} \left(\frac{M}{e B} + \frac{m}{e B} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \omega \left[1 + \frac{n_i M + n_e m}{c^2 \epsilon_0 B^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{avec } e e = n_i$$

En général la 2^e terme est $\gg 1$ donc

$$k_{\pm} \approx \omega \frac{\sqrt{\mu_0 \rho_0}}{B_0}$$

$$\text{si } \rho_0 = n_i M + n_e m$$

la vitesse de phase $\frac{\omega}{k_{\pm}} = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}} = v_A$ de Alfvén

et appelée vitesse d'Alfvén

Ligne de champ guidée

On peut se représenter typiquement le comportement de cette onde de la manière suivante.

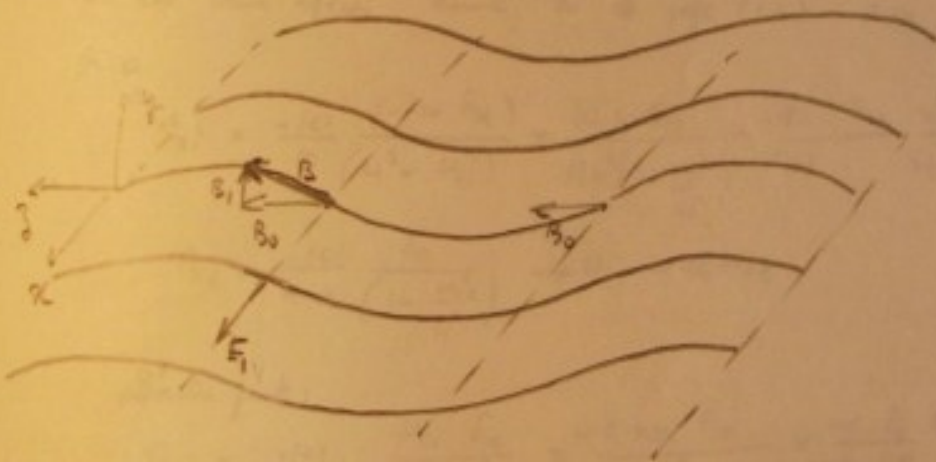
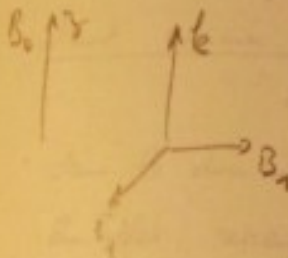
Puisque

$$\text{et } E_1 = - \frac{\partial B_1}{\partial t}$$

on a

$$\text{et } E_1 = +i\omega B_1 \quad \text{et } B_1 \perp k, \quad B_1 \perp E_1$$

On peut considérer le comportement des éléments de fluide et le comportement de la ligne de champ.



Le champ $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1$ a l'allure représentée schématisiquement ci-dessus à un instant donné. Une telle onde se propage suivant oz . La ligne de champ résultant se voit donc à une vitesse transverse de module $\frac{\omega + \frac{B_1}{B_0}}{k}$

Puisque les oscillations sont de très haute fréquence $\omega \ll \omega_{ci}$, les probabilités de saut n'interviennent pas dans la description du mouvement du fluide.

Le champ électrique E_x dans la direction ox communique au plasma une dérive $\frac{E_x \wedge B_0}{B_0^2}$ dans la direction oy (so ici), les électrons comme les ions étant animés dans vitesse

$$v_y = - \frac{E_x}{B_0}$$

donc la dérive de fréquence considérée $\omega \ll \omega_{ci} \ll \omega_{ce}$

En effet, reprenant les expressions des champs des vitesses pour les deux espèces donné au § 1.10 avec $E_y = 0$

$$v_{xi} = \frac{-ie}{m} \frac{(-i\omega E_x)}{(\omega^2 - \omega_{ci}^2)} = \frac{ie}{m\omega^2(1 - \frac{\omega_{ci}^2}{\omega^2})} \approx \frac{-ie}{m\omega} \frac{E_x}{\omega^2} \rightarrow 0 \quad \omega \ll \omega_{ci}$$

$$v_{xe} = \frac{ie}{m\omega} \frac{E_x}{(1 - \frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2})} \rightarrow 0 \quad \omega \ll \omega_{ce}$$

Autre part :

$$v_{yi} = \frac{+ie}{m} \frac{\omega_{ci} E_x}{(\omega^2 - \omega_{ci}^2)} \approx \frac{-e \omega_{ci} E_x}{m \omega_{ci}^2} = \frac{-e E_x}{m} \quad \omega \ll \omega_{ci}$$

$$v_x = - \frac{E_x}{B_0}$$

et

$$v_{ye} = \frac{-ie}{m} \frac{(-\omega_{ce} E_x)}{(\omega^2 - \omega_{ce}^2)} \approx \frac{-ie E_x}{m \omega_{ce}} = - \frac{E_x}{B_0}$$

Donc v_y , E_x et B_0 sont en phase. Le fluide et les lignes de champ oscillent comme si les particules fluides étaient liées (gelées) aux lignes de champ.

§5 Notions sur le transport.

Une supposi. première présente sur le plasma à l'équilibre est l'homogénéité ($n_0 = \text{cte}$). En fait, de manière plus réaliste, il existe toujours des gradients de densité et le plasma se situe fluide dans le diffusion des régions les plus denses vers les régions les moins denses. On se doit alors considérer le cas où il n'y a pas de champs magnétique et distinguera entre les plasmas faiblement ionisés et les plasmas complètement ionisés. On se considérera l'influence d'un champ magnétique

§5.1 Plasmas faiblement ionisés §5.1.1 Bz=0

On considère dans la situation d'une distribution non uniforme d'ions et d'électrons dans un milieu dense constitué d'atomes neutres. Dans le phénomène de détente, les particules effectuent des marches aléatoires, entraînant les collisions fréquentes avec les atomes neutres.

La équation fluide incluant les collisions, et, pour chaque espèce

$$m \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v \right) = -kT \nabla n - \nabla p - m n \gamma v$$

-82-

(chaque neutre $\rightarrow V_e$, ion neutre $\rightarrow V_i$)
 est une fréquence de collisions. Ici on a considéré les
 neutres ionisés. On va négliger le terme non linéaire
 (2.1) du premier membre car v , vitesse moyenne,
 hydrodynamique, est en général très inférieure à la
 vitesse thermique $\sqrt{\frac{kT}{m}}$ ($v_p = v(kT)$, $T = T_e$ ou T_i ,
 $\gamma_e \neq \gamma_i$). Une autre simplification est obtenue si le
 plasma est fortement collisionnel, le temps d'évolution étant
 alors très inférieur à τ et le fluide est essentiel-
 lement stationnaire ($\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$). On a alors, pour un plasma
isotherme

$$v_{e,i} = \frac{1}{m_{e,i} n \gamma_{e,i}} (E |e| n E - k T_{e,i} P_m)$$

$$v_{e,i} = \frac{E |e|}{m_{e,i} \gamma_{e,i}} E - \frac{k T_{e,i}}{m_{e,i} \gamma_{e,i}} \frac{P_m}{n}$$

On appelle $\frac{|e|}{m \gamma_{e,i}} = \mu_{e,i}$ le coefficient de mobilité de charge
 e et

$$D_{e,i} = \frac{k T_{e,i}}{m_{e,i} \gamma_{e,i}} \quad \text{le coefficient de diffusion}$$

De m^2/sec - Ces deux coefficients sont reliés par
 la relation d'Einstein

$$\mu_{e,i} = \frac{|e|}{k T_{e,i}} D_{e,i}$$

On a donc le flux de l'espèce j , T_j :

$$\vec{T}_j = n \vec{v}_j = \mu_j \epsilon_j n \vec{E} - D_j \nabla n.$$

Si on avait considéré des particules non chargées on
aurait $\epsilon_j = 0$, alors $\mu_j = 0$ et

$$\vec{T} = -D \nabla n$$

c'est la loi de diffusion de Fick (D est, flux
proportionnel au gradient de densité. Peut être retrouvé par
la théorie des marches aléatoires).

Diffusion ambipolaire.

Si les dimensions du plasma sont bien plus grandes
que la longueur de Debye, il doit être pratiquement neutre;
on peut alors supposer que les flux d'électrons et d'ions
s'ajoutent pour que les diffusion de chaque espèce
respectent cette neutralité. Ceci ne sera possible que
si le champ électrique E est donné explicitement
en fonction du gradient de densité tel que

$$T_i = T_e$$

Alors

$$\mu_i n E - D_i \nabla n = -\mu_e n E - D_e \nabla n$$

et

$$E = \frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e} \frac{\nabla n}{n}$$

Le flux commun est alors

$$\begin{aligned} \Gamma &= \mu_i \frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e} D_n - D_i D_n \\ &= - \left(\frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e} \right) D_n \end{aligned}$$

On définit une loi de Fick avec un coefficient de diffusion dit ambipolaire D_a tel que

$$D_a = \frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e}$$

L'équation de continuité s'écrit alors, si D_a est constant

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{nv}) = \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} \Gamma = 0$$

ie

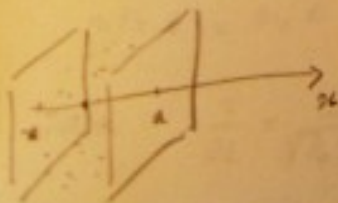
$$\frac{\partial n}{\partial t} + D_a \Delta n = 0$$

Equation de diffusion.

Solution de l'équation de diffusion.

1. Coordonnées cartésiennes

On considère une diffusion dans une dimension,



les ions et les électrons attachés les paires en $x \pm a$, ils se recombinaient et on peut admettre que la densité $n=0$ en $x \pm a$

On peut alors chercher des solutions de l'équation de diffusion sous la forme

$$n(x,t) = f(t) g(x)$$

On a alors

$$g \frac{df}{dt} = D_a f \frac{d^2 g}{dx^2}$$

Donc $\frac{1}{f} \frac{df}{dt} = D_a \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dx^2} = -\frac{1}{\tau} = \text{cte}$

Donc

$$f = f_0 e^{-t/\tau} \quad \text{et}$$

$$\frac{d^2 g}{dx^2} = -\frac{1}{D_a \tau} g \quad \text{dont la solution est}$$

$$g(x) = a \cos \frac{x}{\sqrt{D_a \tau}} + b \sin \frac{x}{\sqrt{D_a \tau}}$$

La connaissance de a et b sera complète quand on se donne la densité à l'instant $t=0$. Le cas le plus simple consiste à prendre une densité paire donnée précisément par

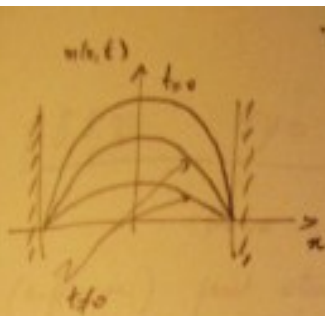
$$n(x,0) = n_0 \cos \frac{\pi x}{2l} \quad (x=0 \text{ et } x=2l)$$

Plus généralement $b=0$ et

$$n(x,t) = n_0 e^{-t/\tau} \cos \frac{\pi x}{2l}$$

avec $\frac{1}{2l} = \frac{1}{\sqrt{D_a \tau}}$

$$\tau = \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \frac{1}{D_a}$$



3. Conduite cylindrique



On a conduit $h(r, z, \theta, t) \equiv n(r, t)$

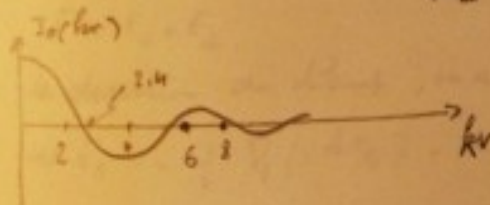
Le cas où

Alors, si $n = f(t) g(r)$, l'équation

pour g est

$$\frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dg}{dr} + \frac{1}{D_a \tau} g = 0$$

Les solutions de cette équation sont les fonctions de Bessel $J_m(kr)$ où $k = \frac{1}{\sqrt{D_a \tau}}$ $m=0, 1, 2, \dots$

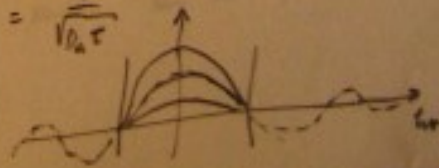


Si aussi, on ne considère que le premier mode
i.e. $n_0(r, t) = n_0 e^{-t/\tau} J_0\left(\frac{r}{\sqrt{D_a \tau}}\right)$

la frontière du fluide doit être telle que pour $r=a$
i.e. $\frac{a}{\sqrt{D_a \tau}} \equiv r_0$ le 1^{er} zéro de J_0

$$\frac{a}{\sqrt{D_a \tau}} = 2.4 = \frac{1}{\sqrt{D_a \tau}}$$

Donc
$$\tau = \frac{1}{(2.4)^2 D_a}$$



§ 3.1.2 $B \neq 0$

On va montrer que le taux de perte de plasma (diffusion) peut être diminué par l'adjonction d'un champ magnétique. Considérons un champ magnétique pres B essentiellement constant.

En reprenant les équations du mouvement au 6ème de page de la leçon précédente, ou 2, avec les mêmes hypothèses simplificatrices. Pour les électrons,

$$-kE - k(v \times B) - \frac{1}{n} D(\nabla^2 n) - m_e v = 0$$

On introduit les composantes des différents vecteurs parallèlement et perpendiculairement au champ B .

$$v = v_{||} + v_{\perp} \quad (v \times B)$$

$$E = E_{||} + E_{\perp}$$

Dans la direction du champ, on a

$$-kE_{||} - \frac{1}{n} D(\nabla^2 n) - m_e v_{||} = 0$$

C'est la même équation que celle qu'on a déjà rencontrée. Le champ B n'affectant pas le mouvement longitudinal, la mobilité et la diffusion y sont celles déjà calculées (idem pour les ions).

Dans la direction perpendiculaire au champ, les particules diffusent vers les parois par un processus de marche aléatoires.

les marches aléatoires ont un caractère différent de celle envisagée précédemment. Quand une particule, en subissant de nombreuses sauts autour d'une ligne de champ entre en collision avec un centre, le centre guide est brusquement déplacé. Le pas de la marche est alors donné par le rayon de Larmor $l_L = \frac{mv_\perp}{qB}$



Une fois donné de la trajectoire

En augmentant B , on peut penser diminuer le pas de cette marche et donc diminuer la diffusion. Soit $\vec{b} = \frac{\vec{B}}{B}$ avec $\omega_{ce} = \frac{qB}{m}$, on a

$$\text{soit } \vec{b} = \frac{\vec{B}}{B} \quad \text{avec } \omega_{ce} = \frac{qB}{m}, \text{ on a}$$

$$\text{soit } E_\perp - m \omega_{ce} (\vec{v}_\perp \wedge \vec{b}) - \frac{1}{\hbar} D_\perp (\hbar \vec{k} \cdot \vec{e}) - m \gamma \vec{v}_\perp = 0$$

$$\vec{v}_\perp \wedge \vec{b} = \vec{v}_\perp \wedge \vec{b} = (\vec{v} \wedge \vec{b})_\perp$$

En multipliant vectoriellement par $\vec{b}$, on obtient

$$\text{soit } (E_\perp \wedge \vec{b}) + m \omega_{ce} \vec{v}_\perp - \frac{1}{\hbar} D_\perp (\hbar \vec{k} \cdot \vec{e}) \wedge \vec{b} - m \gamma \vec{v}_\perp \wedge \vec{b} = 0$$

$$\text{car } (\vec{v}_\perp \wedge \vec{b}) \wedge \vec{b} = (\vec{v}_\perp \cdot \vec{b}) \vec{b} - b^2 \vec{v}_\perp = -\vec{v}_\perp$$

On a un système de 2 équations en $\vec{v}_\perp$ et $\vec{v}_\perp \wedge \vec{b}$
De (6.1) on tire $(\vec{v}_\perp \wedge \vec{b})$

$$-qE_\perp - \frac{1}{\hbar} D_\perp (\hbar \vec{k} \cdot \vec{e}) - m \gamma \vec{v}_\perp = m \omega_{ce} (\vec{v}_\perp \wedge \vec{b})$$

Donc

$$\text{soit } (E_\perp \wedge \vec{b}) + m \omega_{ce} \vec{v}_\perp - \frac{1}{\hbar} D_\perp (\hbar \vec{k} \cdot \vec{e}) \wedge \vec{b} - m \gamma \left(\frac{1}{\omega_{ce}} \right) \left\{ -qE_\perp - \frac{1}{\hbar} D_\perp (\hbar \vec{k} \cdot \vec{e}) - m \gamma \vec{v}_\perp \right\} = 0$$

Donc

$$v_{\perp} \left[m \omega_{ce} + m \frac{v^2}{\omega_{ce}} \right] = |e| (\vec{E}_{\perp} \wedge \vec{b}) + \frac{1}{n} D_{\perp} (n k_B T_e) \wedge \vec{b}$$

$$= \frac{v |e|}{\omega_{ce}} \vec{E}_{\perp} + \frac{v}{n \omega_{ce}} D_{\perp} (n k_B T_e)$$

et

$$\vec{v}_{\perp} = \frac{1}{b(\omega_{ce}^2 + v^2)} \left\{ |e| \omega_{ce} (\vec{E}_{\perp} \wedge \vec{b}) + \frac{\omega_{ce}}{n} D_{\perp} (n k_B T_e) \wedge \vec{b} \right.$$

$$\left. - v |e| \vec{E}_{\perp} - \frac{v}{n} D_{\perp} (n k_B T_e) \right\}$$

On obtient une expression du même type par les ions -
 On remarque donc que la vitesse perpendiculaire est composée
 de deux parties. Tout d'abord, les deux premiers termes
 sont le terme habituel de dérive. Ces dérive sont
 diminuées par les collisions par le facteur $\frac{1}{1 + v^2/\omega_{ce}^2} \rightarrow 1$ quand
 $v \rightarrow 0$

D'autre part, il y a la mobilité et la diffusion
 dont les coefficients ici aussi sont donnés par

$$\mu_1 = \mu_0 \frac{1}{1 + \frac{v^2}{\omega_{ce}^2}} < \mu_0 \quad \mu_2 = \mu_{20}$$

$$D_1 = D_0 \frac{1}{1 + \frac{v^2}{\omega_{ce}^2}} < D_0 \quad D_2 = D_{20}$$

Le produit $\omega_c \tau$ est un paramètre important dans les problèmes de confinement magnétique - soit $\tau = \nu^{-1}$

Si $\omega_c \tau \ll 1$, le champ magnétique a un effet négligeable sur la diffusion

Si $\omega_c^2 \tau^2 \gg 1$, le champ magnétique peut diminuer de manière importante la diffusion transversale

On a alors $\frac{\omega_c^2}{\nu^2} \gg 1$ $\frac{r^2}{\omega_c^2} \ll 1$ (l'anneau fortement magnétisé)

$$|D_{\perp}| = D_0 \frac{r^2}{\omega_c^2} = \frac{kT}{m\nu} \frac{\nu^2}{\omega_c^2} = \frac{kT}{m} \frac{\nu}{\omega_c^2}$$

Contrairement avec l'expression de $D_0 = \frac{kT}{m\nu}$, on voit que l'effet de ν a été inversé. Dans la diffusion parallèle $D_{\parallel}$ est proportionnel à ν^{-1} car les collisions retardent le mouvement

Dans la diffusion transversale, $D_{\perp}$ est proportionnelle à ν - les collisions augmentent le mouvement transversal

Enfin

$$D_0 = \frac{kT}{m\nu} \sim v_{th}^2 \tau \sim \frac{\lambda_m^2}{\tau^2} \tau = \frac{\lambda_m^2}{\tau}$$

$$\text{Car } \tau = \frac{\lambda_m}{v_{th}} \text{ si } \lambda_m \neq 0$$

les parcs moyen

d'autre part

$$D_{\perp} = \frac{kT}{m} \frac{\nu}{\omega_c^2} \sim v_{th}^2 \frac{\nu^2}{\omega_c^2} \nu = \frac{\nu^2}{\tau}$$

$$\eta = \frac{m\nu}{4\pi} = \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2}$$

Bibliographie:

- L.Landau E.Lifchitz**
Electrodynamique des milieux continus
MIR Ed
Mécanique des fluides
MIR Ed
- J.L.Bobin**
Dynamique des plasmas
Cours de D.E.A
- F.F.Chen**
Introduction to plasma physics and controlled fusion
Plenum Press Ed
- P.Germain P.Muller**
Introduction à la mécanique des milieux continus
Masson Ed
- L.Brekhovskikh V.Goncharov**
Mechanics of continua and wave dynamics
Springer Ed
- A.L.Prasuhn**
Fundamentals of fluids mechanics
Prentice Hall Ed
- J.Obala**
Exercices et problèmes de Mécanique des milieux continus
Masson Ed
- W.F.Hughes J.A.Brighton**
Shaum's series of theory and problems of fluids mechanics
Mac Graw Hill Ed
- A.Le Pourhiet**
Résolution numérique des équations aux dérivées partielles
Cepadues Ed