

Introduction à la Physique des Plasmas

Généralités

I.1 Introduction

Un plasma est une collection de particules chargées, de densité suffisamment élevée pour que les forces de Coulomb puissent être prises en compte $\rightarrow$

$\rightarrow$, mais de densité suffisamment basse pour que les interactions entre plus proches voisins soit dominée par la force de Coulomb à longue portée exercée par les particules lointaines. Cette situation est à opposer à celle du gaz neutre où les forces interparticulaires sont à courte portée.

La physique des plasmas est essentiellement celle d'un problème à n corps et généralement invoque les résultats de la mécanique classique, l'électromagnétisme et la mécanique statistique pour sa description.

Cependant, la physique des plasmas est une discipline à part entière et joue un rôle important en astrophysique (est constituée 95% de l'univers connu en l'intérieur des étoiles, les nébuleuses gazeuses et la plus grande partie de l'hydrogène interstellaire sont du plasma).

Dans notre environnement terrestre, on rencontre les plasmas dans la haute atmosphère (d'où l'intérêt que leur portent les spécialistes de télécommunications) dans la ceinture de Van Allen et le vent solaire.

La technique actuelle utilise les harmoniques produites par exemple par décharge électrique dans les gaz donnant ainsi des sources de lumière à spectre continu (flash électronique) ou direct (laser). D'autre part, les recherches sur la fusion thermonucléaire contrôlée, la chimie de haute température font largement appel aux plasmas.

§1.2 Description du plasma

Comment étudier un plasma ? Ceci peut se faire suivant deux voies complémentaires.

a) une voie macroscopique (à grande échelle) où des quantités moyennes (sur un grand nombre de particules) telles que la température, la densité peuvent être utilisées pour décrire l'état local du milieu. On désigne cette approche par le terme magnétohydrodynamique, ou description fluide.

b) une voie microscopique (à petite échelle) où les différentes distributions de vitesses des particules sont utilisées pour décrire l'état du milieu dans chaque région spatiale. Ceci est une voie plus détaillée que la voie précédente ; elle est statistique car elle considère des probabilités

en ne cherchant pas à décrire chaque particule individuellement. C'est la théorie cinétique. Très souvent, un modèle fluide peut être dérivé d'une théorie cinétique. (voir plus bas $\S$)

Quelle voie utiliser? La réponse dépend du problème considéré. $\rightarrow$ Le modèle cinétique est en principe plus précis que le modèle fluide mais il peut engendrer des problèmes mathématiques fort compliqués. Parfois, une réponse plus approximative à partir d'une théorie microscopique sera suffisante. Le choix doit alors se faire en terme de valeurs prises par certains paramètres physiques.

Par exemple, dans le cas d'un gaz neutre, une description fluide sera suffisante si le libre parcours moyen entre collisions est bien plus court que toute les autres longueurs considérées dans le problème. Le cas opposé d'un tube poreux très grand peut être considéré en terme de trajectoires d'atomes individuels. Une telle approche a son équivalent de la cas des plasmas mais alors la nature plus compliquée des orbites de particules chargées joue un rôle. Pour le plasma, on a de nouvelles longueurs caractéristiques

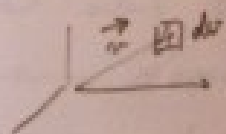
Le modèle statistique le plus complet et en général le plus détaillé est donc fait intractable car il nécessite la connaissance des probabilités sur les positions et les vitesses de toutes les particules. De ce fait, à l'aide d'approximation, il est habituellement converti en une description qui porte sur l'étude de la distribution $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$ d'une particule.

Pour cela, on définit $\hat{f}(\vec{x}, \vec{v}, t)$ une densité de probabilité sur l'espace des vitesses

$$\int \hat{f}(\vec{x}, \vec{v}, t) d\vec{v} = 1 \quad \forall \vec{x}, t$$

$$\text{Dimension de } \hat{f} \quad (\text{m.s}^{-1})^{-3}$$

Soit $n(\vec{x}, t)$ la densité de particules en $\vec{x}$, à l'instant t (nombre de particules par m^3). Alors, le nombre de particules au point $\vec{x}$ à l'instant t avec une vitesse dans l'élément de volume $d\vec{v}$ autour de $\vec{v}$ est par définition



$$f(\vec{x}, \vec{v}, t) = n(\vec{x}, t) \hat{f}(\vec{v}, t)$$

$$\text{On a bien} \quad n(\vec{x}, t) = \int f(\vec{x}, \vec{v}, t) d\vec{v}$$

$$\text{dim } f = \text{m}^6 \text{s}^3$$

Fin de §

Exemple important : distribution de Maxwell

$$\hat{f}(\vec{x}, \vec{v}, t) = \hat{f}_M(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{1}{2} \frac{m \vec{v}^2}{kT}}$$

Cas indépendant de t

où k est la constante de Boltzmann. $k = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
 m : masse de l'électron, T : température en $^{\circ}\text{K}$

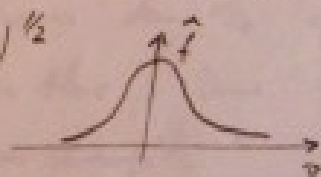
$$\vec{v}^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \quad \left(\frac{3kT}{m} \right) = v_M^2$$

A l'aide de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ on a $\int \hat{f}_M(\vec{v}) d\vec{v} = 1$

A l'aide de cette loi de probabilité, on peut calculer des valeurs moyennes. Par exemple.

$$\langle \vec{v}^2 \rangle = \int \vec{v}^2 \hat{f}_M(\vec{v}) d\vec{v} = \frac{3kT}{m} \rightarrow \left\langle \frac{1}{2} m \vec{v}^2 \right\rangle = \frac{3}{2} kT$$

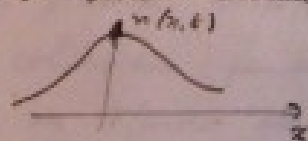
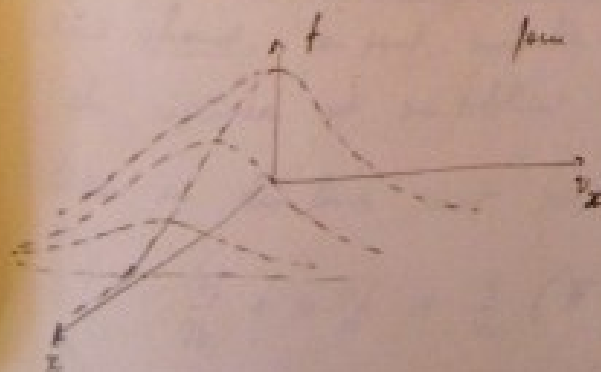
$$\langle |\vec{v}| \rangle = \int |\vec{v}| \hat{f}_M(\vec{v}) d\vec{v} = 2 \left(\frac{3kT}{\pi m} \right)^{1/2}$$



$$\langle v_x \rangle = \langle v_y \rangle = \langle v_z \rangle = 0$$

$$\langle |v_x| \rangle = \left(\frac{2kT}{\pi m} \right)^{1/2}$$

On peut alors se représenter $f(\vec{x}, \vec{v}, t) = n(\vec{x}, t) \hat{f}(\vec{x}, \vec{v}, t)$
 la densité d'espace et de vitesse, et n le nombre d'électrons par unité de volume.



Équations cinétiques : on peut alors établir des équations dites cinétiques qui doivent vérifier $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$.

L'équation de base qui doit vérifier f est l'équation de Boltzmann.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{x}} f + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \nabla_{\vec{v}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c$$

où F est la force agissant sur la particule - on peut l'établir simplement en remarquant que

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v} \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m} \quad \text{avec } m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

Il y a aussi des collisions, $\frac{\partial f}{\partial t} \neq 0$. En effet, dans un élément de volume $d\vec{x} d\vec{v}$, la densité est $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$ - à l'instant t_0 .



A l'instant t_0 , la particule se trouvait dans v_0 et se trouve dans v_1 après avoir été accélérée en bloc. Dans v_1 la densité n'a pas changé.

Il y a des collisions. Cependant, les particules diffusent et on doit ajouter le terme $\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll}$.

(a) Équation de Vlasov. Si le plasma est suffisamment chaud, on peut montrer que les collisions peuvent être négligées et on obtient l'équation de Vlasov dans le cas où les forces sont purement électromagnétiques

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{x}} f + \frac{q}{m} (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \nabla_{\vec{v}} f = 0$$

Par conséquent, on pourra considérer les ions comme immobiles
(on se déplace beaucoup plus lent que celui des électrons
à cause de leur masse : $m_p \gg m_e$ (plus grande que la masse des
électrons, peu des fois)).

Si le champ magnétique peut être négligé, on a
les équations

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_x f + \frac{-qE}{m} \cdot \vec{\nabla}_v f = 0 \\ \Delta \phi = - \frac{\sigma}{\epsilon_0} (x, t) \\ \sigma(x, t) = |e| (n_0 - \int_{-\infty}^{+\infty} f dv) \end{cases} \quad (\text{système CGS})$$

si n_0 est le densité uniforme des ions

- p. v.

(a) Si γ est la collision avec des atomes neutres, le terme

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c \text{ peut être approché par}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c = \frac{f_0 - f}{\tau}$$

où f_0 est la fonction de distribution des atomes et τ un temps de collision (constant). C'est le modèle de Krook

(b) Quand on doit tenir compte de manière plus précise des interactions coulombiennes, on obtient des équations de type Fokker-Planck où le terme de collision est une fonction en général non linéaire de f et de ses dérivées.

— N —

Le rayon de Debye

$$\lambda_D(m) = (K T_e \epsilon_0 / 4\pi e^2 n)^{1/2} = 7.43 \cdot 10^3 (T_e(eV) / n(m^{-3}))^{1/2}$$

qui est une mesure de la sphère d'influence d'une charge positive dans un plasma.

- Pour un plasma magnétisé, on a le rayon de Larmor électronique

$$\rho_L(m) = 2.38 \cdot 10^{-6} T_e(eV)^{1/2} B(T)^{-1}$$

qui est le rayon de la projection de l'orbite dans un plan perpendiculaire à un champ B. Dans ces formules, qui restent validées pour le cas, T_e est la température électronique, K la constante de Boltzmann, n la densité, e la charge électronique et B le champ magnétique.



Le choix de la méthode est fonction des conditions rencontrées dans la nature ou dans le laboratoire. Donnons le tableau suivant, où λ et λ_D sont les paramètres moyens

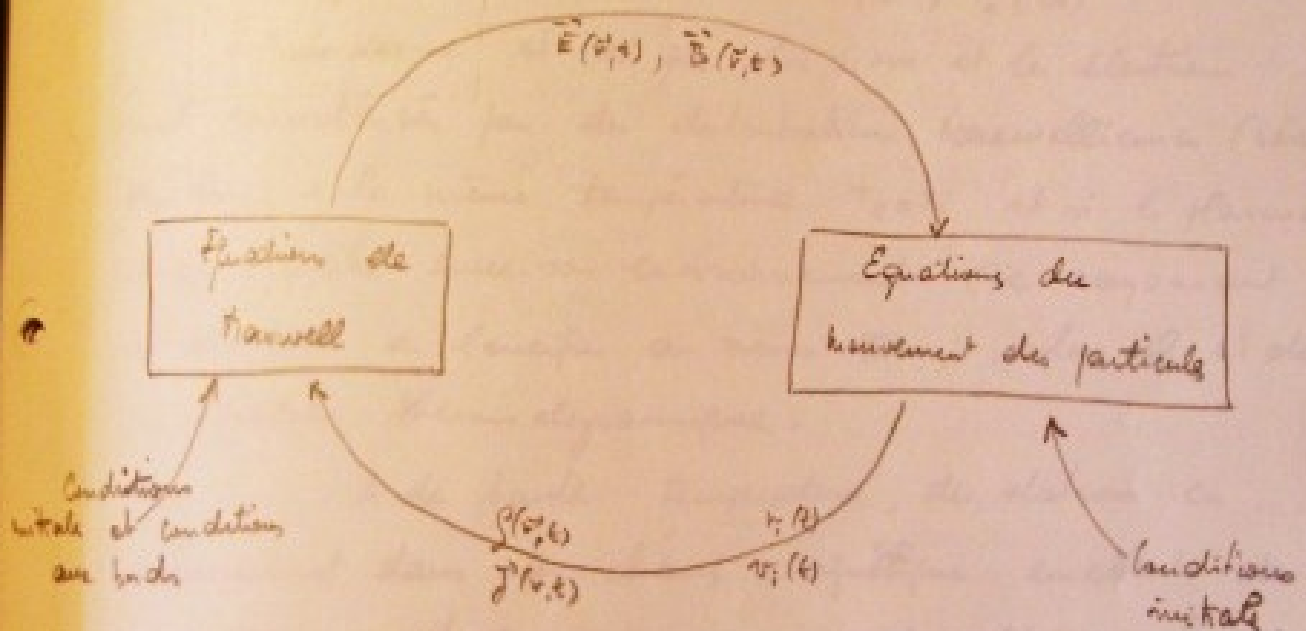
	$n \text{ (cm}^{-3}\text{)}$	$T \text{ (}^\circ\text{K)}$	$\lambda \text{ (cm)}$	$\lambda_D \text{ (cm)}$
Plasma intergalactique	10^{-5}	10^3	$7 \cdot 10^4$	10^{15}
" interstellaire	1	10^4	$7 \cdot 10^2$	$1.3 \cdot 10^{12}$
" interplanétaire, ceinture de radiations	10^2	10^5	10^2	$1.3 \cdot 10^{12}$
Atmosphère de la Terre	10^{18}	10^3	0.2	$1.3 \cdot 10^4$
Plasma solaire	10^8	10^6	7	$1.3 \cdot 10^{10}$
Plasma chaud densité	10^{12}	10^6	$7 \cdot 10^{-3}$	1.3
Plasma de fusion	10^{16}	10^8	$7 \cdot 10^{-4}$	$1.3 \cdot 10^4$
Interieur des étoiles	10^{24}	10^8	10^{-6}	$1.3 \cdot 10^{-2}$
Vaisseaux blancs	10^{30}	10^3	$7 \cdot 10^{-11}$	10^{-4}
Pulsars	10^{26}	10^{12}	$7 \cdot 10^{-9}$	10^{12}

Paramètres caractérisant des plasmas typiques

A titre de comparaison, l'air a une densité $n = 10^{19} \text{ (cm}^{-3}\text{)}$ à une température $T \approx 300^\circ\text{K}$ (ordre de grandeur). Il est clair que cette densité de situations implique une densité de cette -de.

Dans tous les cas, on a affaire à une force fondamentale d'interaction électromagnétique caractérisée d'abord par sa longue portée, son caractère (l'énergie potentielle étant

comparable à l'énergie cinétique des particules composant le plasma.) On a alors le schéma suivant.



Les méthodes de résolution mettent en œuvre des systèmes d'équations aux dérivées partielles - lorsque les méthodes analytiques sont insuffisantes, une simulation directe en ordinateur peut être utilisée mais la taille actuelle des machines est encore largement insuffisante.

§1.3 Propriétés du plasma

1.3.1 Rayonnement Une propriété évidente d'une collection de particules chargées est l'émission de rayonnement dû aux collisions mutuelles. Dans une

collision électron-ion, l'électron sera accéléré et émettra un rayonnement appelé Bremsstrahlung. La densité de puissance est donnée par la formule

$$P_2 (\text{W m}^{-3}) = 1.69 \cdot 10^{-31} n (\text{m}^{-3})^2 T_e (\text{eV})^{1/2}$$

Le plasma est tel que les ions et les électrons sont caractérisés par des distributions Maxwelliennes (voir Kelvin) à la même température $T_e = T_i$ et si le plasma est en équilibre avec son environnement (ie rayonnant et absorbant de l'énergie au même taux), alors il est dit en équilibre thermodynamique.

À de haute température, des électrons en mouvement dans un champ magnétique émettent de manière importante un rayonnement dit synchrotron. La pulsation de ce rayonnement est la fréquence cyclotron

$$\omega_{ce} = \frac{eB}{m_e} \approx 1.76 \cdot 10^3 B(\text{T})$$

la norme de l'électromagnétique.

De tel rayonnement peuvent donner lieu à des mécanismes de perte importants dans les plasmas thermonucléaires.

1.3.2 Ordes

Il existe un grand nombre d'oscillations possibles dans le système possédant un aussi grand nombre de degrés de liberté et des perturbations ondulatoires

peuvent se propager dans un tel milieu. On établit alors une relation de dispersion $\omega(k)$ qui relie la fréquence (en fait pulsation) angulaire ω au vecteur d'onde k . La vitesse de phase est ω/k $v = |\vec{v}|$ et la vitesse de groupe (vitesse de propagation de l'énergie) est $\frac{d\omega}{dk}$. Un plasma peut propager à la fois des ondes linéaires (de faible amplitude) et des ondes non linéaires (de grande amplitude). On étudiera différents types d'ondes linéaires parmi lesquelles :

1) Les ondes électromagnétiques - Des ondes planes électromagnétiques peuvent se propager dans un plasma qui est un milieu diélectrique ^(de constante diélectrique ϵ). Par exemple, pour un plasma froid, de Lorentz (électron immobile de densité n_e et ions immobiles), homogène et isotrope

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad \text{avec} \quad \omega_p^2 = \frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0} \quad , \quad f_{pe} \text{ est la fréquence plasma}$$

$$f_{pe} = \frac{\omega_p}{2\pi} = 10 \sqrt{n_e} \text{ (Hz)}$$

2) Onde de plasma (ou onde d'Langmuir) ^(ou onde de Langmuir) ou onde de Langmuir ^(ou onde de Langmuir) quasi neutre, un petit déplacement d'électron entraîne des oscillations électriques à la pulsation ω_{pe} . Ces oscillations peuvent se propager (si la température est suffisante) à la pulsation ω telle que

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \left(\frac{3\hbar T_e}{m_e} \right) k^2$$

Ces ondes sont amorties par un effet dit effet Landau qui peut être schématisé ainsi. Pour une distribution de vitesses d'équilibre de particules, il y a plus de ~~de~~ particules lentes que de particules rapides. Les particules plus lentes que l'onde acquièrent de l'énergie de l'onde tandis que celles plus rapides lui communiquent de l'énergie - L'effet résultant est une perte d'énergie de l'onde et un amortissement en résulte.

3) Ondes ioniques sonores Comme dans les gaz ordinaires non ionisés, il existe une onde de propagation du son pour chaque composante du plasma. Dans un plasma aux températures ioniques $T_i \ll T_e$ et $\omega \gg \nu$ (ν est la fréquence des collisions électron-ion) ces ondes ne sont pas fortement amorties, il existe un nouveau type de propagation d'onde sonore. Ici, la pression électronique communique la force de rappel et les ions communiquent l'inertie, c'est-à-dire les électrons et les ions sont couplés par la charge d'espace. Ces ondes se propagent à la vitesse

$$v = \left(\frac{2 \gamma_e K T_e + \gamma_i K T_i}{m_i} \right)^{1/2}$$

où γ est la charge ionique, γ_i est le rapport des chaleurs spécifiques des ions (i) et des électrons (e), m_i est la masse des ions.

4) ondes dans les plasmas magnétisés D'autre type d'ondes peuvent se propager dans des plasmas magnétisés i.e. plongés dans un fort champ magnétique. En particulier la direction de propagation devient importante. Une notion de vitesse importante est celle de vitesse d'Alfvén

$$v_A (m/s) = \frac{B}{\sqrt{\mu_0 \rho_m}} \approx 2.2 \cdot 10^6 n(n+3)^{-1/2} (3T)$$

qui est la vitesse de propagation de perturbation magnétique transverse le long du champ magnétique, à basse fréquence ($\omega \ll \omega_{ci}$ = fréquence cyclotronique ionique)
 $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ ρ_m est la densité de masse $\rho_m = n m_e + n_i m_i$

5) ondes dans les plasmas inhomogènes Si un plasma a des gradients de densité n , ou de température T (ce qui est le plus courant) les dérivées de particule et le courant plasma donnent lieu à des ondes de dérive. Par exemple, pour un gradient de densité ∇n , on a la vitesse de dérive

$$v_d = \frac{1}{cB} T \left(\frac{\nabla n}{n} \right)$$

§ 1.33 Notions sur le transport

La théorie des transport conduit à décrire le flux des particules, de l'impulsion et de l'énergie dans un plasma. Des coefficients de transport sont déterminés

Dans le cadre d'une théorie cinétique et écrite des équations macroscopiques contenant des coefficients sont résolus. Non sans contenter ici d'une approche plus simple basée sur le modèle fluide pour calculer quelques coefficients de transport.

Un des problèmes à résoudre, d'ordre part, et celui de la stabilité des équilibres de plasma, c'est

§ 1.3.4 Macro et micro instabilités. Dans un plasma en équilibre, la situation la plus courante est celle d'une petite perturbation de paramètres caractérisant cet équilibre. Si la perturbation persiste, l'équilibre est dit instable, sinon il est dit stable. Les instabilités peuvent être classées de la manière suivante

a) macroinstabilités (ou de configuration spatiale). Elles sont associées à des écarts des grandeurs macroscopiques par rapport à l'équilibre.

b) microinstabilités (dans l'espace des vitesses). Elles sont caractérisées par des écarts à la distribution Maxwellienne d'équilibre des vitesses. On les distingue

b₁) les instabilités électrostatiques, associées à des accumulations de charges. Ce sont celles qui croissent le plus rapidement

b₂) les instabilités électromagnétiques, associées à des accumulations de courant.

Les instabilités particulièrement étudiées portent les noms d'instabilités flute, interchange, acoustique-ionique, kink, miro, Rayleigh-Taylor, ~~sawtooth~~, tearing (déchirement).

Les méthodes utilisées pour étudier la stabilité ^{linéaire} peuvent être alors classées en deux catégories.

(1) Concepts d'énergie : Un équilibre de plasma est ^{linéairement} stable si l'énergie potentielle est un minimum pour toute les petites perturbations possibles autour de l'état d'équilibre.

(2) Analyse en modes : Les équations linéarisées du plasma pour l'évolution dans le temps de petites perturbations sont résolues, avec des conditions aux limites appropriées, avec une dépendance temporelle de la forme $\exp(-i\omega t)$. Ceci donne le spectre des fréquences possibles ω . ω peut être réel (oscillations) ou complexe. Dans ce cas, la stabilité dépend du signe de la partie imaginaire de ω .

Durant ces vingt dernières années, des progrès importants ont été réalisés dans la compréhension et le contrôle des instabilités. Mais, encore aujourd'hui, un chauffage de plasma ^{confiné} entraîne des instabilités et une perte rapide de l'énergie du plasma.

Avant de passer à une étude plus détaillée de plusieurs points abordés dans ce qui précède, on va préciser à présent les quelques notions de base concernant un plasma qui sont le taux d'ionisation, température, longueur de Debye, etc.

2.4 Paramètres du plasma

Tout gaz ionisé se peut être appelé un plasma; d'autre part, si existe toujours un certain degré d'ionisation dans tout gaz.

14.1 Taux d'ionisation

On peut estimer le taux d'ionisation d'un gaz en équilibre thermique par la formule de Saha

$$\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} n \approx 2 \times 10^{21} T^{-3/2} \exp(-U_i/kT)$$

Ici $\frac{n_e}{n}$ est la densité d'électrons sur la densité d'atomes ionisés et d'atomes neutres, T est la température du gaz en °K, k est la constante de Boltzmann

$$k = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/°K}$$

et U_i l'énergie d'ionisation du gaz. Pour de l'air ordinaire
 à la température ambiante, on peut prendre $n \approx 3 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$
 (une mole d'un gaz idéal contient $6,022 \cdot 10^{23}$ molécules
 d'azote et occupe 22,4 L, à une température de 0°C et une pression
 de $760 \text{ Torr} \approx 760 \text{ mm Hg}$. D'où la densité dans ces conditions
 est $\frac{6,022 \cdot 10^{23}}{22,4 \cdot 10^{-3}} = 2,66 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$). D'autre part, $T = 300^\circ\text{K}$
 et $U_i = 14,5 \text{ eV}$ (pour de l'azote) et
 $10^4 = 1,6 \cdot 10^{19} \text{ J}$. Alors $d^2 \approx 0$.

Quand la température suit, le degré d'ionisation reste
 négligeable tant que $U_i \gg kT$. Puis il suit brutalement
 abrupte et le gaz devient un plasma. Une augmentation
 de T rend $n_n \ll n_i$ et le plasma devient essentiellement
 complètement ionisé. C'est pourquoi les plasmas
 existent dans les objets astronomiques avec des températures
 de millions de degrés, mais pas sur la terre.

1.4.2 Température

Un gaz en équilibre thermique est constitué
 de particules ayant toutes les vitesses, et la distribution
 la plus probable de ces vitesses est connue sous
 le nom de distribution Maxwellienne.

$$f(\vec{x}, \vec{v}, t) = n(\vec{x}, t) \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{1}{2} \frac{m \vec{v}^2}{kT}}$$

$$\text{Déjà on } \left\langle \frac{1}{2} m \vec{v}^2 \right\rangle = \frac{3}{2} kT$$

Il est d'usage de exprimer la température T en eV par le
facteur de conversion k . $1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$
 $T_e = \frac{1.6 \cdot 10^{-19}}{1.38 \cdot 10^{-23}} = 11600 \text{ }^\circ\text{K}$

Donc $1 \text{ eV} \approx 11600 \text{ }^\circ\text{K}$ On parle de 2 eV ou 3 eV
 $kT_e = 2 \text{ eV}$ ($T_e = 23200 \text{ }^\circ\text{K}$) et $E_{\text{avg}} = 3 \text{ eV}$

On peut noter qu'un plasma peut posséder plusieurs
températures au même instant. Il se peut que les ions et
les électrons aient des distributions Maxwelliennes
différentes avec des températures différentes T_i et T_e . Ceci
provient du fait que le taux de collisions entre ions
ou entre électrons est plus grand que le taux de collisions
entre ion et électron. Donc chaque espèce peut posséder
sa propre équilibre thermique bien que le plasma
soit un seul et même ensemble pour lequel les deux
températures

quand il y a un champ magnétique, les deux
espèces peuvent avoir deux températures. Par exemple, pour
des ions, les températures des ions sont différentes
selon B et perpendiculairement à B , avec
des températures $T_{\parallel}$ et $T_{\perp}$ différentes.

On fait remarquer, pour terminer sur ce point
d'équilibre, que la température ne s'ajuste pas
nécessairement entre elles.

24-

idem... (some faint text)

Exercice, 20p et 20T, on linéaire et on obtient

(a) $\Delta\phi = \frac{2Ne^2}{\epsilon_0 KT} (1+\epsilon) \phi$ (b) $(\frac{N_+ e^2}{KT} - (\frac{1}{2} - \epsilon) \frac{\phi}{KT})$

En géométrie sphérique, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}$, on cherche une solution qui s'annule à l'infini. Une telle solution représente le potentiel créé par les particules autour d'un ion donné, choisi comme origine. La solution est :

(1) $\phi(r) = \frac{\phi_0}{r} e^{-r/\lambda}$ (2) Potentiel de Debye Hückel

où $\frac{1}{\lambda^2} = \frac{2Ne^2}{\epsilon_0 KT} (1+\epsilon)$ $\frac{\phi_0}{\lambda} \rightarrow \phi_0$

Ceci définit la longueur de Debye

(3) $\lambda_D = \left[\frac{\epsilon_0 KT}{2Ne^2(1+\epsilon)} \right]^{1/2}$

Remarquons que $\frac{1}{\lambda_D^2} = \frac{N_+ e^2}{\epsilon_0 KT} + \frac{2^2 N_- e^2}{\epsilon_0 KT} = \frac{1}{\lambda_{De}^2} + \frac{1}{\lambda_{D-}^2}$

où $\lambda_{De} = \left(\frac{\epsilon_0 KT}{N_+ e^2} \right)^{1/2}$ et $\lambda_{D-} = \left(\frac{\epsilon_0 KT}{2^2 N_- e^2} \right)^{1/2}$

On appelle longueur de Debye la quantité

$\lambda_{De} = \left(\frac{\epsilon_0 KT}{N_+ e^2} \right)^{1/2}$

-45-

Après la solution de Debye Hückel
 Soit $\Delta\phi = \frac{1}{\lambda^2} \phi$ Vérifions que la solution est

$$\phi = \phi_0 \frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r}$$

$$\Delta\phi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right)$$

$$\frac{d\phi}{dr} = \phi_0 \left(-\frac{1}{r^2} e^{-\frac{r}{\lambda}} + \frac{1}{r} \left(-\frac{1}{\lambda} \right) e^{-\frac{r}{\lambda}} \right)$$

$$= -\frac{\phi}{r} - \frac{1}{\lambda} \phi = -\phi \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\lambda} \right)$$

$$r^2 \frac{d\phi}{dr} = -\phi \left(r + \frac{r^2}{\lambda} \right) \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = -\frac{d\phi}{dr} \left(r + \frac{r^2}{\lambda} \right)$$

$$= \phi \left(1 + \frac{2r}{\lambda} \right)$$

$$= +\phi \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\lambda} \right) \left(r + \frac{r^2}{\lambda} \right) - \phi \left(1 + \frac{2r}{\lambda} \right)$$

$$= \phi \left(1 + \frac{2r}{\lambda} + \frac{r^2}{\lambda^2} - 1 - \frac{2r}{\lambda} \right) = \frac{r^2}{\lambda^2} \phi$$

$$\text{Donc} \quad \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = \frac{1}{\lambda^2} \phi \quad \text{OK}$$

$$\phi_0? \quad \text{car } \lambda \text{ pond } \frac{1}{\lambda} \text{ pond}$$

$$e^{-\frac{1}{\lambda}} \approx 1$$

$$\phi_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

— N —

- k6 -

exercice On fait le calcul de la longueur de Debye en
supposant la ion immobile de densité uniforme N_i

$$n_i = N_i \quad n_e = N_i e^{e\phi/kT} = N_e e^{e\phi/kT}$$

$$-L\phi = \left(n_i - n_e \right) \frac{e}{\epsilon_0} \quad \epsilon_0$$

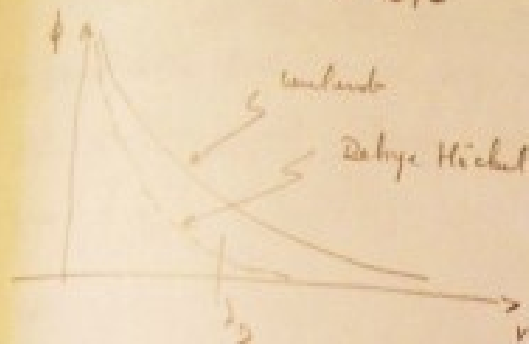
$$\Delta\phi = \left(n_i - n_i e^{e\phi/kT} \right) \frac{e}{\epsilon_0} = n_i \left(1 - e^{e\phi/kT} \right) \frac{e}{\epsilon_0}$$

$$e\phi \ll kT \quad \Delta\phi = n_i \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = N_e \frac{e^2}{kT\epsilon_0} \phi = \Delta\phi$$

$$\Rightarrow \Delta\phi = \frac{\phi}{\lambda_D^2} \quad \text{avec} \quad \lambda_D = \left(\frac{kT\epsilon_0}{N_e e^2} \right)^{1/2}$$

— N —

- k7 -



La longueur de Debye apparaît ainsi comme la partie effective du potentiel électrostatique lorsque l'on tient compte de l'effet de toutes les autres charges (qui fait écran au potentiel de Coulomb)

Notons que si $N \uparrow$, $\lambda_D \downarrow$. D'autre part, λ_D croît quand $kT \uparrow$. Il n'y a pas d'agitation thermique, l'effet d'écran est total

avec les relations suivantes

$$\lambda_{De} = 69 \left(\frac{T}{n_e} \right)^{1/2} \text{ en m, } T \text{ en } ^\circ\text{K}$$

$$\lambda_{De} = 7430 \left(\frac{KT}{n_e} \right)^{1/2} \text{ en m, } kT \text{ en eV}$$

On peut à présent ^{d'une manière plus précise,} définir la notion de "quasineutralité". La dimension L de l'optique est bien plus grande que λ_D , alors même si des concentrations locales de charges se produisent au sein du plasma, les potentiels électriques sont introduits dans le système, l'effet de ceux-ci est écranté sur une distance petite par rapport à L . En dehors de la gaine (d'épaisseur λ_D), où se trouve la gaine et $n_i \approx n_e$ la densité de plasma - Le plasma est alors quasineutre.

- R 3 -

164 Critère de définition d'un plasma

a) On peut dire pour qu'un gaz ainsi soit appelé plasma et qu'il est suffisamment dense pour que λ_D soit bien plus petit que L . ($\lambda_D \ll L$)

b) On dit qu'un gaz est un plasma si la température des électrons est suffisamment élevée pour que les électrons soient déviés par les champs magnétiques. On dit qu'un gaz est un plasma si la température des électrons est suffisamment élevée pour que les électrons soient déviés par les champs magnétiques.

b) la deuxième critère repose sur le fait que l'écrantage de Debye n'est valable que s'il y a suffisamment de charges dans la sphère de Debye.

En effet, l'existence de la solution de Debye Hückel est soumise à la condition que $e\phi \ll kT$ qui ne peut être satisfaite pour les petites valeurs de v (ϕ croît). Par contre au voisinage de λ_D , cette condition s'écrit :

$$\epsilon \left(\frac{ze}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-\frac{r}{\lambda_D}} \right) = \frac{ze^2 e^{-1}}{4\pi\epsilon_0 \lambda_D} \ll kT$$

Comme $\frac{kT \epsilon_0}{N_e e^2} = \lambda_D^2$ on en déduit

$$\frac{ze^{-1}}{\lambda_D} \ll \lambda_D^2 N_e \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lambda_D^3 N_e \gg 1$$

On peut encore dire : la sphère de Debye doit contenir un grand nombre d'électrons. $\left(\frac{4}{3} \pi \lambda_D^3 N_e = N_D \text{ et } N_D \gg 1 \right)$

Donc, en plus de la condition $\lambda_D \ll L$, on peut dire que la notion de comportement collectif ne compte pas être vraie

3) $N_D = \frac{4}{3} \pi \lambda_D^3 N_e = 1.38 \times 10^6 T^{3/2} / N_e^{1/2} \gg 1 \quad (T \text{ en } ^\circ K)$

c) Une troisième critère est relatif aux collisions. Si les particules chargées subissent un grand nombre de collisions avec les neutres, on peut considérer que leur évolution sera gouvernée par des forces hydrodynamiques plutôt que par des forces électromagnétiques. Si ω_p est la fréquence des oscillations du plasma et τ est le temps moyen entre collisions avec les neutres, la condition est

$$\omega_p \tau \gg 1$$

— N —

II Mouvement de particules chargées dans des champs électromagnétiques.

Le plasma se comporte parfois comme des fluides, parfois comme des collections de particules individuelles. Il est important de connaître le comportement de particules chargées dans des champs électriques et magnétiques que l'on va supposer donnés et non affectés par les particules.

§ 2.1 Champ E et B uniformes

2.1.1 $E=0$ dans alors $m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$

on introduit les notations $\vec{v}_\parallel = \frac{\vec{v} \cdot \vec{B}}{B}$ $\vec{v}_\perp \cdot \vec{v}_\perp = v_\perp^2$ $\vec{v}_\perp^2 = \vec{v}^2 - v_\parallel^2$

alors $\dot{v}_\parallel = 0$ donc $v_\parallel = \text{cte}$

$\frac{m}{q} \dot{\vec{v}}_\perp = \vec{v}_\perp \wedge \vec{B}$ d'où $\frac{m}{q} \dot{\vec{v}}_\perp \cdot \vec{v}_\perp = 0$ et $v_\perp^2 = \text{cte}$

Donc par $\left(\frac{m}{q}\right)^2 \ddot{\vec{v}}_\perp = \frac{m}{q} \dot{\vec{v}}_\perp \wedge \vec{B} = (\vec{v}_\perp \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B} = (\vec{v}_\perp \cdot \vec{B}) \vec{B} - B^2 \vec{v}_\perp$

ie $\ddot{\vec{v}}_\perp = -\omega_c^2 \vec{v}_\perp$ où $\omega_c = \frac{qB}{m}$ est la fréquence cyclotronique

Donc chaque composante de $\vec{v}_\perp$ vérifie l'équation d'un oscillateur harmonique

soit $\vec{v} = v_{\perp} \hat{e}_{\theta}$, avec $\vec{B} \parallel \hat{z}$ $v_z^2 = v^2 - v_{\perp}^2 \Rightarrow v_z$ constante positive

$$v_x = v_{\perp} \cos(\omega_c t + \varphi)$$

$$v_y = \mp v_{\perp} \sin(\omega_c t + \varphi)$$

où φ est une constante arbitraire. Dans $\left(\begin{matrix} + \rightarrow \text{proton} \\ - \rightarrow \text{electron} \end{matrix} \right)$ ($\pm$ suivant le signe de la charge)

$$x = \frac{v_{\perp}}{\omega_c} \sin(\omega_c t + \varphi) + X$$

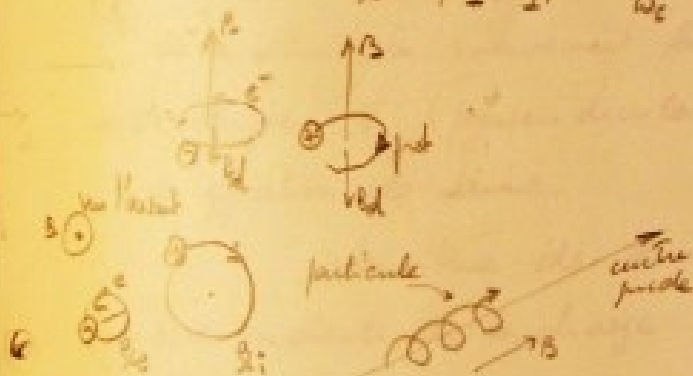
$$y = \mp \frac{v_{\perp}}{\omega_c} \cos(\omega_c t + \varphi) + Y$$

$\begin{matrix} + \text{ proton} \\ - \text{ electron} \end{matrix} \quad \omega_c = \omega_{ce} \text{ ou } \omega_{ci}$

6. Une $\vec{v}_{\perp}$ a un mouvement circulaire uniforme, autour d'un centre arbitraire $R(x, y)$, de fréquence ω_c , avec le rayon de giration de Larmor

$$\omega_{ce} > \omega_{ci} \quad R_{ie} < R_{ii}$$

$$R_L = |\vec{r} - \vec{R}| = \frac{v_{\perp}}{\omega_c}$$



6. $R(t) = r_0 + v_{\perp} t$, R est appelé position du centre guide et a un mouvement linéaire

Le champ magnétique créé par les rotations de particule est opposé au champ appliqué ; on dit que le fluide est diamagnétique

$$2.1.2 \quad \underline{E \neq 0 \quad B \neq 0}$$

$$\text{soit } \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{E}_{\parallel}$$

Tandis que

$$\frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} = (\vec{E}_{\perp} + \vec{v}_{\perp} \wedge \vec{B})$$

13.

Rayon nous dans un référentiel se déplaçant à la vitesse constante V , et soit

$$v_1 = c_1 + V \quad \text{donc}$$

$$\frac{m}{q} \dot{c}_1 = (E_1 + VAB) + c_1 AB$$

On prend V tel que $V = \frac{EAB}{B^2}$ en tenant l'équation suivante pour c_1

$$\frac{m}{q} \dot{c}_1 = c_1 AB \quad \text{Donc} \quad \dot{c}_1 \cdot c_1 = 0 \quad \text{et} \quad c_1^2 = \text{cte}$$

d'où le mouvement est ici aussi un mouvement circulaire uniforme avec la fréquence ω_c et rayon $\rho_c = \frac{c_1}{\omega_c}$

La vitesse de la particule est alors

$$\vec{v} = v_{\parallel} \vec{n} + \vec{V} + \vec{c}_1$$

On a donc un mouvement le long de B , une vitesse d'entraînement V perpendiculaire à B et un mouvement de gyration de Larmor.

La vitesse de dérive $V = \frac{EAB}{B^2} = \frac{E_1 AB}{B^2}$ est indépendante de la charge. Prenant une moyenne sur une période on a

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\omega_c}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_c} dt \vec{v} = v_{\parallel} \vec{n} + \vec{V}$$

Cette vitesse est elle d'entraînement. En projection sur un plan $\perp$ à B



⊙ B vers l'avant

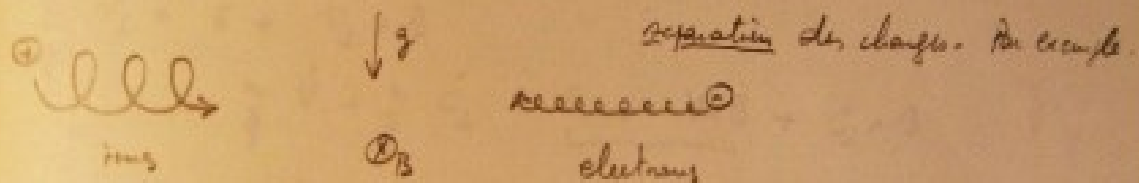
Nouveau séparation des charges



des résultats précédents peuvent être étendus au cas d'une force quelconque, autre que magnétique, et appliquée par la relation $q\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$. On a donc la vitesse de dérive

$$\mathbf{v}_d = \frac{1}{q} \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{B^2}$$

Si $\mathbf{F}$ est la force de gravitation $\mathbf{v}_g = \frac{1}{q} \frac{q\mathbf{A} \times \mathbf{B}}{B^2}$ $\mathbf{A}$ diff change avec le signe de la charge et induit un processus de



§2.2 Champs inhomogènes et variant dans le temps

Dans beaucoup de situations, l'ordre de grandeur de l'inhomogénéité de champs est très grande par rapport au rayon de Larmor, et l'ordre de grandeur de variation dans le temps est très grande par rapport à la période de gyration $\frac{2\pi}{\omega_c}$. Dans ces conditions, le mouvement de la particule peut être séparé en une rapide rotation autour du centre guide, associée à un drift lent du centre guide transverse au champ magnétique.

On va cependant donner à présent une représentation élémentaire des effets résultant d'une non uniformité de $\mathbf{B}$ et $\mathbf{E}$.

2.2.1 Champ électrique variable dans le temps

Dérive de la relation

On suppose $\vec{E}$ perpendiculaire à $\vec{B}$ (à généraliser à une composante parallèle non nulle) et spatialement uniforme.

On a, dans un référentiel se déplaçant à la vitesse $\vec{V}$, avec $\vec{v}_1 = \vec{V} + \vec{c}_1$,

$$\begin{aligned} \frac{h}{q} \dot{\vec{v}}_1 &= \vec{E} + \vec{v}_1 \wedge \vec{B} \\ &= \frac{h}{q} \dot{\vec{V}} + \frac{h}{q} \dot{\vec{c}}_1 = \vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B} + \vec{c}_1 \wedge \vec{B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \vec{V} &= \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{B^2}, \quad \vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B} = \vec{E} + \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{B^2} \wedge \vec{B} \\ &= \vec{E} + \frac{(\vec{E} \cdot \vec{B}) \vec{B}}{B^2} - \frac{B^2}{B^2} \vec{E} = 0 \end{aligned}$$

donc

$$\frac{h}{q} \dot{\vec{c}}_1 = -\frac{h}{q} \dot{\vec{V}} + \vec{c}_1 \wedge \vec{B}$$

Cette équation a une structure analogue à $\frac{h}{q} \dot{\vec{v}}_1 = \vec{E}_1 + \vec{v}_1 \wedge \vec{B}$ mais avec la propriété que la force additionnelle est donnée par $\frac{1}{\omega_c} \frac{d\vec{E}}{dt}$ et donc $O(\frac{\omega}{\omega_c})$ où ω caractérise la fréquence de variation de $\vec{E}(t)$ (supposé monochromatique).

À présent, introduisons une seconde transformation par analogie avec $\vec{v} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{B^2}$ au référentiel

$$\begin{aligned} \vec{U} &= -\frac{h}{q} \frac{\dot{\vec{V}} \wedge \vec{B}}{B^2} = -\frac{h}{q B^2} \frac{\dot{\vec{E}} \wedge \vec{B}}{B^2} \wedge \vec{B} \\ &= -\frac{h}{q B^4} \left(\frac{\dot{\vec{E}} \cdot \vec{B}}{B^2} \right) \vec{B} + \frac{h}{q B^4} B^2 \dot{\vec{E}} = \frac{h}{q B^2} \dot{\vec{E}} \end{aligned}$$

l'équation Φ devient, avec $C_2 = u_2 + U$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\hbar}{q} (u_2 + U) \right] = - \frac{\hbar}{q} \dot{V} + (u_2 + U) \wedge B = u_2 \wedge B$$

car $\dot{V} = \frac{\dot{E} \wedge B}{B^2}$ et $U \wedge B = \frac{\hbar}{q} \frac{\dot{E} \wedge B}{B^2}$

Donc $\frac{\hbar}{q} \ddot{u}_2 = u_2 \wedge B - \left(\frac{\hbar}{q} \right)^2 \frac{\ddot{E}}{B^2}$ i.e

$$\frac{\hbar}{q} \frac{d}{dt} (C_2 - U) = (C_2 - U) \wedge B - \left(\frac{\hbar}{q} \right)^2 \frac{\ddot{E}}{B^2}$$

Le terme explicite en $\ddot{E}$ est alors $O\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2$ peut être alors négligé et l'équation pour $(C_2 - U)$ est l'équation habituelle de la gyration de Larmor. Donc, en moyennant sur une période avec $\langle (C_2 - U) \rangle = 0$, on obtient la vitesse du centre guide

$$\langle \vec{v} \rangle = v_H \vec{u} + \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} + \frac{\hbar}{q B^2} \vec{E}$$

car $\langle C_2 - U \rangle = 0$ et $\langle C_2 \rangle = v = \frac{\hbar \dot{E}}{q B^2}$

La nouvelle vitesse de dérive U depend de la charge et la cause d'une séparation de charge. Elle est appelée vitesse de polarisation.

2.2.2 Champ magnétique variant dans le temps :

moment magnétique Le champ magnétique se peut voir comme une source de ^{potentiels mais} variations de B sont source de champ électrique par la loi de Faraday.

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

et peuvent leur communiquer de l'énergie.

A partir de :

$$\dot{h}v = q(E + v \wedge B) \quad , \text{ car } \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \right) = E \cdot v_{\perp}$$

$$\left(\frac{1}{2} m \frac{dv_{\perp}}{dt} + \frac{1}{2} m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = E + v_{\perp} \wedge B \quad \Rightarrow \frac{1}{2} m v_{\perp} \frac{dv_{\perp}}{dt} = E \cdot v_{\perp} \right)$$

La variation d'énergie dans le mouvement perpendiculaire, en une période de l'électron est donc

$$\delta \left(\frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \right) = q \int \vec{E} \cdot \vec{v}_{\perp} dt = q \oint \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

si l'intégrale est prise sur une orbite. Donc

$$= q \oint \vec{r} \cdot \vec{E} \cdot d\vec{s} = -q \oint \frac{\partial B}{\partial t} \cdot \vec{r} \cdot d\vec{s} = e \frac{\partial B}{\partial t} \pi r_L^2 \quad q = -e$$

$$= \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \frac{\pi r_L^2}{\omega_c B} \frac{\partial B}{\partial t}$$

Les variations de B sur une période sont

$$\delta B = \frac{\partial B}{\partial t} \delta t = \frac{\partial B}{\partial t} \frac{2\pi}{\omega_c} \quad \text{Donc}$$

$$\delta \left(\frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \right) = \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \frac{\delta B}{B}$$

$$\text{Donc si } \mu = \frac{\frac{1}{2} m v_{\perp}^2}{B}$$

$$\frac{\delta \mu}{\mu} = \frac{\delta \left(\frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \right)}{\frac{1}{2} m v_{\perp}^2} = \frac{\delta B}{B} = 0$$

$$\boxed{\delta \mu = 0}$$

Le moment magnétique est conservé dans des champs magnétiques variant dans le temps. Quand B varie, le rayon de Larmor s'accroît ou diminue et la particule gagne ou perd de l'énergie transverse. Il y a échange d'énergie entre la particule et le champ.

D'autre part, le flux à travers une orbite de Larmor reste constant. En effet

$$\bar{\Phi} = B \pi \frac{v_z^2}{\omega_c^2} = B \pi \frac{v_z^2 \frac{1}{2}}{q^2 B^2} = \frac{2\pi \frac{1}{2}}{q^2} \frac{1}{B} = \frac{2\pi \mu}{q^2} \mu.$$

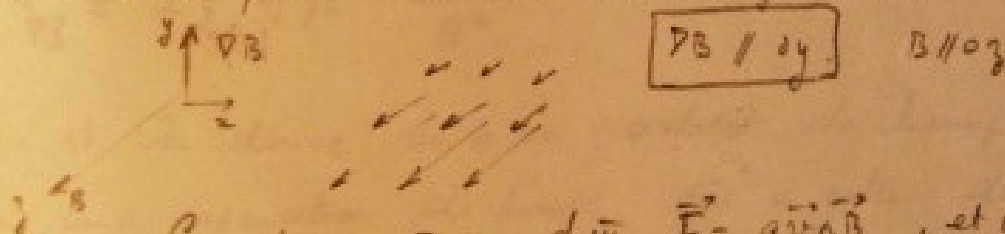
Cette propriété est à l'origine d'une méthode de chauffage du plasma appelée compression adiabatique (voir plus loin miroirs magnétiques).

2.3 Champs magnétiques variant dans l'espace

Ici aussi, on va développer un modèle approché en développant par rapport au petit paramètre $\frac{\rho_L}{L}$ où ρ_L est le rayon de Larmor et L est un ordre de grandeur de l'inhomogénéité.

1) $\nabla B \perp B$ Derive due au gradient de champ

On va considérer B avec une orientation constante mais variable d'un point à un autre suivant oy (et non suivant oz)



Considérons $\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$, et moyennons sur une période de gyration. On a, en effectuant

$$\bar{F}_y = -q v_z B_z(y) = -q v_z \cos \omega_c t \left[B_0 + \rho_L (\cos \omega_c t) \frac{\partial B}{\partial y} + o(\rho_L^2) \right]$$

on a effectué un développement de Taylor de B autour du centre guide (y_0, z_0)

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \left(\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{B} + \dots$$

$$\text{avec } \vec{r} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \quad B(x_0, y_0, z_0) = B_0$$

$$y - y_0 = \pm \rho_L \cos \omega_c t, \quad v_x = v_z \cos \omega_c t$$

-19-

Donc $\vec{B} = \vec{B}_0 + (r_x \frac{\partial}{\partial x} + r_y \frac{\partial}{\partial y} + r_z \frac{\partial}{\partial z}) B_y \vec{e}_z$

$$B_y(y) = B_0 + r_y \frac{\partial}{\partial y} B_y$$

$$= B_0 \pm \rho_L \cos \omega t \cdot \frac{\partial B_0}{\partial y}$$

On a donc $\vec{F}_y = \mp q \frac{v_z}{2} \rho_L \frac{\partial B}{\partial y}$ avec $\langle \cos \omega t \rangle = \frac{1}{2}$

Remarquons que $F_x = 0$ car $F_x = q v_y B_y(y)$ et $v_y = v_z \sin \omega t$ (Donc les moyennes temporelles sont nulles).

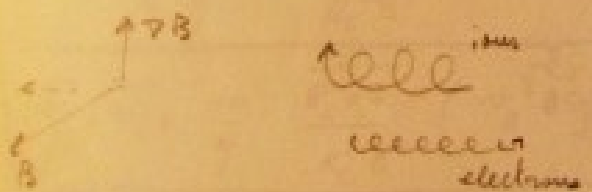
La vitesse du centre guide peut être obtenue ici par

$$v_{cy} = \frac{1}{q} \frac{\vec{F} \wedge \vec{B}}{B^2} = \frac{1}{q} \frac{\vec{F}_y}{|B|} \vec{e}_x = \mp \frac{v_z \rho_L}{B} \frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial y} \vec{e}_x$$

Comme le choix de l'axe oy est arbitraire, on a pour un gradient quelconque

$$\vec{v}_{\perp B} = \pm \frac{1}{2} v_z \rho_L \frac{\vec{B} \wedge \nabla |B|}{B^2}$$

qui est la dérive due à un gradient de champ. Ici aussi, on a séparation de charge due à cette dérive



3) Dérive de courbure

Supposons que les lignes de champ sont courbées avec un rayon de courbure R_c et considérons le cas où $|B| = \text{constante}$. Un tel champ se peut voir

les équations de Parvelli. Bien, il faudra toujours ajouter la dérive due au grad B. Le $v_{||}^2$ représente le carré de la vitesse (moyenne) le long de B, la force centrifuge moyenne est



moyenne est

$$\vec{F}_c = \frac{m v_{||}^2}{R_c} \vec{e}_r = m \frac{v_{||}^2}{R_c^2} \vec{R}_c$$

On a donc la vitesse de dérive de courbure

$$\vec{v}_d = \frac{1}{q} \frac{\vec{F}_c \wedge \vec{B}}{B^2} = \frac{m v_{||}^2}{q B^2} \frac{\vec{R}_c \wedge \vec{B}}{R_c^2}$$

On calcule à présent la dérive due au grad B quand on tient compte de la variation de B avec r. On a, dans le cas du courant négligeable, $\nabla \cdot \vec{B} = 0$.
 soit $(\nabla \cdot \vec{B})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\theta) = 0$ car $B_\theta \neq 0$ $B_z = B_r = 0$

soit $B_\theta \sim \frac{1}{r}$ $|B| \sim \frac{1}{R_c}$ d'où $\frac{\partial |B|}{\partial r} = - \frac{\vec{R}_c}{R_c^2}$

On a donc

$$\begin{aligned} \vec{v}_d &= \mp \frac{1}{2} \frac{v_{||}^2}{q} \frac{1}{B^2} \vec{B} \wedge |\vec{B}| \frac{\vec{R}_c}{R_c^2} = \pm \frac{1}{2} \frac{v_{||}^2}{q} \frac{\vec{R}_c \wedge \vec{B}}{R_c^2 B} \\ &= \pm \frac{1}{2} \frac{m}{q} \frac{v_{||}^2}{B^2} \frac{\vec{R}_c \wedge \vec{B}}{R_c^2} \end{aligned}$$

On a donc la dérive totale

$$\boxed{\vec{v}_d = \vec{v}_d + \vec{v}_d = \frac{m}{q} \frac{\vec{R}_c \wedge \vec{B}}{R_c^2 B^2} \left(v_{||}^2 + \frac{1}{2} v_{\perp}^2 \right)}$$

La conséquence de cette dérive est que si on considère un système refermant les lignes de champ pour confiner le plasma, les particules vont être amenées à s'échapper par cette dérive, de la torse.

3) $\nabla|B|$ parallèle à $\vec{B}$. Miroir magnétique - laine de paille
 Soit le champ magnétique, à symétrie axiale $B_\theta = 0$, $\frac{\partial}{\partial \theta}$ des
 autres composantes nulle. qui peut être représenté schématiquement
 de la forme suivante (bouteille magnétique) $B_z \neq 0$ $B_r \neq 0$



L'existence d'une composante $B_r \neq 0$ permet de piéger une particule dans un tel champ. En effet, calculons tout d'abord B_r à l'aide de $\text{div } \vec{B} = 0$ qui nous dit ici

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad \text{car}$$

$$r B_r = - \int_0^z r \frac{\partial B_z}{\partial z} dz \approx - \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right)_{z=0} \quad \text{si } \frac{\partial B_z}{\partial z} \text{ ne varie pas trop avec } z.$$

pas trop avec z .

Dérivée due à $\nabla|B|$. Or $\vec{\omega}_{\nabla B} \equiv \frac{\vec{B} \wedge \nabla|B|}{B^2}$

$$\vec{B} \wedge \nabla|B| = \begin{vmatrix} B_r & 0 & B_z \\ 0 & \frac{\partial}{\partial r}(|B|) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z}(|B|) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & A(r,z) \neq 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Donc, la seule dérive due à $\nabla|B|$ est une dérivée de centre
guide autour de l'axe de symétrie



à projection dans un plan $\perp$ oz

la d'autre part

$$F_z = -q \nabla \phi_r = \frac{1}{2} q \nabla \phi + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$$

Considérons pour simplifier, une particule dont le centre guide
se trouve sur l'axe de symétrie. Alors, $\nabla \phi$ est une constante $\pm \nabla \phi$
et $r = r_L$. On a donc (- ions, + électrons)

$$F_z = \pm \frac{1}{2} q \nabla \phi_L \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = \pm \frac{1}{2} q \frac{v_z^2}{\frac{1}{2} q \phi_L} \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{1}{2} \frac{m v_z^2}{|B|} \frac{\partial B}{\partial z}$$

Plus généralement
le moment magnétique étant $\mu = \frac{1}{2} m v_z^2 / |B|$ ($\mu = \frac{1}{2} S$
où $S = \frac{q \omega_c}{2\pi}$ $S = \pi r_L^2$), la force résultant de l'interaction de
ce moment avec le champ est donc $F = -\mu \nabla |B|$. Montrons que
 μ est constant. On a, en prenant la composante de cette der-
nière équation suivant la ligne de champ, $B = |B| \hat{z}$

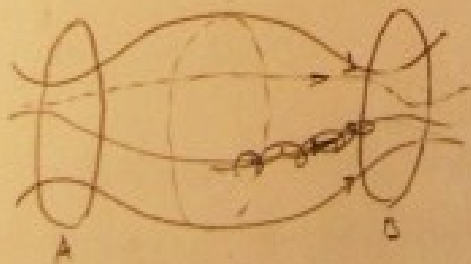
$$m \frac{dv_z}{dt} = -\mu \frac{\partial B}{\partial z} \quad \text{d'où} \quad m v_z \frac{dv_z}{dt} = -\mu \frac{\partial B}{\partial z} v_z = -\mu \frac{\partial B}{\partial z} \frac{dz}{dt} = -\mu \frac{dB}{dt}$$

L'axe de la particule devant être conservée, on a

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_z^2 + \frac{1}{2} m v_\perp^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_z^2 + \mu B \right) = 0$$

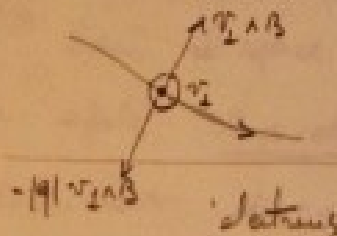
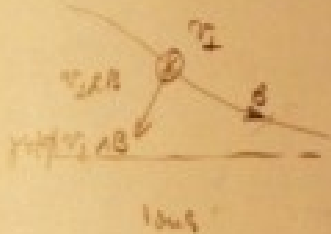
$$\text{D'où} \quad -\mu \frac{dB}{dt} + \frac{d}{dt} (\mu B) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\mu}{dt} = 0$$

On peut vérifier ce comportement de μ en utilisant
cette invariance de μ .



Comme dans par exemple le champ créé par deux spires A et B le champ est plus fort en A et B que dans l'espace intermédiaire. Dans son mouvement, la particule doit avoir une vitesse v_z forte dans un champ fort et faible dans un champ faible pour que μ reste constant ; si B est assez fort, v_z peut alors s'annuler et la particule peut être réfléchie. Un plasma peut être ainsi confiné.

Schématiquement, on a la situation suivante



Dans les 2 cas, il existe une accélération dont la composante suivant l'axe de révolution est en sens contraire du gradient de champ. Une fois agit dans un la particule qui se dirige vers les champs forts par les raisons :
c'est l'effet miroir. Cet effet existe aussi dans la magnétosphère terrestre.



de piégeage n'est cependant pas total. Par exemple, si $v_z = 0$, la particule ne subit aucune force le long de B et a un mouvement longitudinal suivant B.

Soit B_0 et B_1 les modules de champ en un point intermédiaire et dans la région où $v_{\theta} = 0$. On a

$$\frac{1}{2} \frac{\ln v_{\perp 0}^2}{B_0} = \frac{1}{2} \frac{\ln v_{\perp 1}^2}{B_1}$$

D'autre part, $v_{\perp 1}^2 = v_{\perp 0}^2 + v_{\theta 0}^2 = v_0^2$

On doit donc avoir $\frac{B_1}{B_0} = \frac{v_{\perp 0}^2}{v_0^2} = \frac{v_{\perp 0}^2}{v_0^2} = \sin^2 \theta$

Soit B_m le champ (correspondant à une valeur maximum) sur l'une des spirales. Toute la particule pour laquelle

$B < B_m$ avec $\sin^2 \theta_m = \frac{B_0}{B_m}$ violerait les limites



Ceci définit dans l'espace des vitesses

un cône appelé cône de perte (qui est indépendant de q et u)

Si des collisions ne produisent,

les particules s'échappent du piège si elles

changent leur θ pour se trouver dans le cône de perte.

(les électrons sont plus difficiles à piéger que les ions car leur fréquence de collisions est plus grande)

§ 3 Modèles fluides des flammes.

Dans une flamme, la situation est plus complexe que celle considérée dans le chapitre précédent. Les champs ne sont pas fixes, mais dépendent de l'évolution des particules. Les densités considérées étant relativement élevées, la résolution des équations de base est impossible.

En fait, un grand nombre de problèmes peut être vu dans un modèle fluide, où on considère par l'évolution de chaque particule mais celle d'éléments macroscopiques. Si dans un fluide ^{peut-être} les collisions sont suffisamment nombreuses pour permettre aux particules d'être en quelque sorte solidaires les uns des autres et justifier un tel modèle, dans les flammes, les collisions ne sont pas très fréquentes. Néanmoins, une telle approche est possible dans certains cas.

§ 3.1 Les équations du mouvement.

§ 3.1.1 Introduction
Les champs E et B sont connus à l'aide des équations de Maxwell, en terme d'un état donné de forme

(densité, courant, ...). D'autre part, il faut dériver l'équation donnant la réponse du plasma à un champ donné. Ce sont les équations fluides, dans l'approximation fluide, appliquées à chaque espèce de particules (ions, électrons et neutres si nécessaire).

L'équation du mouvement d'une particule est $m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Pour un gaz de cellules et par la dilution thermique, alors toutes les particules se déplacent ensemble, et la vitesse moyenne $\mathbf{u}$ d'un élément fluide est la même que celle des particules. Or, en multipliant par n , la densité

$$n \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} = qn(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

En fait, la dérivée, dans cette équation, doit être prise à la position des particules. Ceci n'est pas adéquat.

Considérons une grandeur $G(\mathbf{r}, t)$ qui est un champ, la température, densité, vitesse. La variation de G dans le temps, dans un référentiel se déplaçant avec le fluide, est

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial G}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= \frac{\partial G}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) G \end{aligned}$$

et s'appelle la dérivée convective de G .

(F.1) s'écrit donc, en tenant compte de la dérivée convective

$$m n \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = q n (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

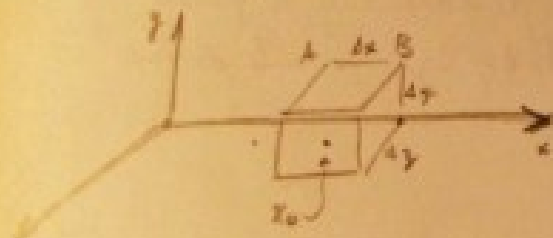
où $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ est la dérivée de $\mathbf{u}/t$ en un point fixe de l'espace

L'intérêt de cette formulation est dans le fait qu'on peut avoir analytiquement la variation du champ de vitesse dans le temps en chaque point fixe de l'espace.

3.2.2 Contraintes

En présence d'agitation thermique, on doit ajouter autre chose dans (7.1). Soit un élément fluide $\Delta x \Delta y \Delta z$ centré

en $(x_0, \frac{1}{2} \Delta y, \frac{1}{2} \Delta z)$



Le nombre de particules par volume

passant par la face A avec vitesse v_x

est $\Delta n_x (v_x \Delta y \Delta z)$ où Δn_x est le nombre de particules par m^3 avec vitesse v_x (voir introduction) dans l'élément Δv_x autour de v_x . Or $\Delta n_x = \Delta v_x \iint f(\vec{x}, \vec{v}, t) dv_y dv_z$.

Chaque particule a une impulsion $m v_x$. Supposons que la densité n et la température T sont celles correspondant au centre du volume. Le moment P_A^+ transporté dans l'élément, en x_0 , à travers A est

$$P_A^+ = \sum \Delta n_x m v_x^2 \Delta y \Delta z = \Delta y \Delta z \left[m \bar{v}_x^2 \frac{1}{2} n \right]_{x_0 - \frac{\Delta x}{2}}$$

Le facteur $\frac{1}{2}$ provient du fait que la moitié des particules se dirigent vers A (en moyenne). De la même manière le moment transporté en dehors du volume par B est

$$P_B^+ = \Delta y \Delta z \left[m \bar{v}_x^2 \frac{1}{2} n \right]_{x_0 + \frac{\Delta x}{2}}$$

-fr-

Donc, le gain total en moment est

$$\begin{aligned} P_A^+ - P_B^+ &= \Delta y \Delta z \frac{1}{2} m \left([n \bar{v}_x^2]_{x_0 - \Delta x/2} - [n \bar{v}_x^2]_{x_0 + \Delta x/2} \right) \\ &= \Delta y \Delta z \frac{1}{2} m (-\Delta x) \frac{\partial}{\partial x} (n \bar{v}_x^2) \end{aligned}$$

On tient compte é présent du gain provenant de particule s'achappant par A et entrant dans le volume par B, oua

$$- m \frac{\partial}{\partial x} (n \bar{v}_x^2) \Delta x \Delta y \Delta z \quad \text{ce qui doit être égal à} \quad \frac{\partial}{\partial t} (n m u_x) \Delta x \Delta y \Delta z \quad u_x : \text{vitesse moyenne}$$

Soit é présent v_{xr} , la x composante de la vitesse d'une particule. Ou a

$$v_{xr} = u_x + v_{xr} \quad \text{ou} \quad u_x = \bar{v}_x \quad \bar{v}_x = u_x$$

ou u_x est la vitesse de l'élément fluide et v_{xr} est la vitesse due à l'agitation thermique. Pour une distribution maxwellienne à une dimension, oua

$$\frac{1}{2} m \overline{v_{xr}^2} = \frac{1}{2} kT \quad \text{Ou é alors, avec}$$

$$\begin{aligned} v_{xr} &= v_x - \bar{v}_x \\ \overline{v_{xr}^2} &= \overline{(v_x - \bar{v}_x)^2} = \overline{v_x^2} - \bar{v}_x^2 \\ &= \frac{kT}{m} = \overline{v_x^2} - u_x^2 \end{aligned}$$

Donc

$$\overline{v_x^2} = \frac{kT}{m} + u_x^2$$

Donc donc

$$\frac{\partial}{\partial t} (n m u_x) = - n \frac{\partial}{\partial x} \left(n \left[u_x^2 + \frac{kT}{m} \right] \right)$$

On en déduit donc

$$m n \frac{\partial u_x}{\partial t} + m n u_x \frac{\partial n}{\partial t} = - n u_x \frac{\partial (n u_x)}{\partial x} - m n u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (n k T)$$

L'équation de conservation de la masse étant

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n u_x) = 0$$

permet d'écrire

$$m n \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} (n k T)$$

En éliminant la pression, et en généralisant à 3 dimensions, on obtient, en considérant aussi la force

$$m n \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = q n (\mathbf{E} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{B}) - \nabla p \quad \text{électromagnétique}$$

Ici, on a supposé que le fluide est isotrope, permettant de généraliser les transferts de moment en x par des mouvements dans la direction x . Mais il est aussi possible de transférer des moments par x

par des mouvements en y . Dans ce cas, p n'est plus un scalaire et p doit être remplacé par un tenseur $\mathbf{P}$

$$\nabla p \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{P} \quad \text{où} \quad P_{ij} = m n \overline{v_i v_j}$$

Pour une distribution isotrope $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$

et $\nabla \cdot \mathbf{P} = \nabla p$. Mais il se peut qu'un plasma, par exemple dans un champ magnétique, ait 2 types de viscosité $T_{\parallel}$ et $T_{\perp}$ au champ. Dans ce cas

avec $p_{11} = n k T_1$ et $p_{22} = n k T_2$, ou $P = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & 0 \\ 0 & p_{22} & 0 \\ 0 & 0 & p_{11} \end{pmatrix}$

3.13 Collisions

Si un gaz neutre est présent, il existe des échanges de moments entre les fluides chargé et neutre par collisions. τ , le temps moyen de libre parcours entre collisions, est constant, la force résultante peut être approchée par $-n n_0 (u - u_0)/\tau$, où u_0 est la vitesse du fluide neutre. L'équation du mouvement peut alors être généralisée sous la forme

$$(37) \quad m n \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right] = q n (E + u \wedge B) - \nabla \cdot P - \frac{m n (u - u_0)}{\tau}$$

On ne prendra pas compte ici des "collisions" coulombiennes, qui sera considérée plus tard.

3.14 Équation de continuité

La densité de flux de particules étant $n \vec{u}$ où $\vec{u}$ est la vitesse fluide, N est le nombre de particules à l'intérieur d'un volume V , ou

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \int_V \frac{\partial n}{\partial t} dV = - \int_V n \vec{u} \cdot \vec{\nabla} dV = - \int_V \text{div} (n \vec{u}) dV$$

l'équation de continuité est

$$(38) \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \text{div} (n \vec{u}) = 0$$

§ 3.1.5 Equation d'Etat

Elle est généralement prise sous la forme

$$p = C n^\gamma \quad n: \text{densité}$$

où C est une constante et γ est le rapport des chaleurs spécifiques C_p/C_v . On a alors

$$\frac{p}{\rho} = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}$$

Pour des compressions isothermes, on a

$$p = \gamma (kT) = kT \rho / m$$

et donc $\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0}$ d'où $\gamma = 1$

Pour des compressions adiabatiques, T peut changer et γ peut être > 1 . Si N est le nombre de degrés de liberté,

$$\text{on sait que } \gamma = \frac{2+N}{N} \quad N=3 \quad \gamma = \frac{5}{3}$$

§ 3.1.6 Système complet d'équations fluides

Supposons que le plasma soit composé de 2 espèces : ions et électrons. On a alors

$$\sigma = n_i q_i + n_e q_e \quad q_i = -q_e$$

$$\vec{j} = n_i q_i \vec{v}_i + n_e q_e \vec{v}_e$$

On néglige les collisions et on considère une première approximation

à savoir

$$\text{div } E = \frac{1}{\epsilon_0} (q_1 q_1 + q_2 q_2)$$

$$\text{rot } E = - \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\text{div } B = 0$$

(I.11)

$$\text{rot } B = \mu_0 (h_1 q_1 v_1 + h_2 q_2 v_2) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\left. \begin{aligned} h_j q_j \left[\frac{\partial v_j}{\partial t} + (v_j \cdot \nabla) v_j \right] &= q_j h_j (E + v_j \wedge B) - \nabla p_j \\ \frac{\partial \rho_j}{\partial t} + \text{div}(\rho_j v_j) &= 0 \\ p_j &= G_j \rho_j \end{aligned} \right\} j=1,2$$

Données: $q_1, q_2, \rho_1, \rho_2, v_1, v_2, E, B$ (16 scalaires)

alors on a 16 équations scalaires.

§ 3.2 Dérives fluides.

Le terme ∇p dans l'équation du mouvement va être associé à une vitesse de dérive qui sera appelée fluide car il n'apparaît que dans ce équation fluide. Pour chaque espèce, on a $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$ (vitesse fluide au lieu de $\vec{v}$)

(I.12)

$$h_j q_j \left[\frac{\partial v_j}{\partial t} + (v_j \cdot \nabla) v_j \right] = q_j h_j (E + v_j \wedge B) - \nabla p_j. \quad (I.12)$$

On va ^③ introduire ^① qu'un mouvement ^② perpendiculaire
à $\vec{B}$ et $\vec{B}$ et un champ magnétique supposé constant

D'autre part, on va donner des estimations grossières, mais suffisamment raisonnables, en faisant des approximations. Il s'agit de comparer les divers termes dans (F.12) en considérant les divers régimes de variations dans l'espace et le temps. - Pour des variations harmoniques à la pulsation ω , et en utilisant des notations complexes, on peut associer à la dérivée $\frac{\partial}{\partial t}$ la multiplication par $i\omega$. - Or, alors, pour les mouvements transverses au champ B

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \right| \approx \left| \frac{m \omega v_{\perp}}{q \hbar v_{\perp} B} \right| = \frac{m \omega}{q \hbar B} = \frac{\omega}{\omega_c}$$

si ω_c est la pulsation cyclotronique

Pour des dérivées telles que $\omega \ll \omega_c$, on peut négliger le terme a) - On négligera aussi le terme b), ce qui paraît valable par la suite. - Soit E et B uniformes mais v et p variables (le premier est généralement le cas dans les formules ci-dessus de colonne). On a alors

$$\begin{aligned} 1 &= q \hbar [E \wedge B + (v_{\perp} \wedge B) \wedge B] - v_p \wedge B \\ &= q \hbar [E \wedge B + \underbrace{(v_{\perp} \cdot B) B}_{=0} - v_{\perp} B^2] - v_p \wedge B \end{aligned}$$

D'où

$$v_{\perp} = \frac{E \wedge B}{B^2} - \frac{v_p \wedge B}{q \hbar B^2} = v_D + \omega_c$$

- f r o -

ou $v_D = \frac{E \lambda B}{B^2}$ est la vitesse de dérive particulière et

$$w_D = - \frac{D p A B}{q n B^2}$$

et la dérive dite diamagnétique -
Pour un plasma isotherme

potentiel de (v.D)w = 0.

$$\frac{D}{n} = \frac{D(n k T)}{n} = k T \frac{D}{n}$$

Colonne:



Dans ce type de configuration, pour un plasma isotherme,

$$|w_D| = \frac{k T}{q B} \left| \frac{v_i}{n} \right|$$

$$= \frac{(k T) w}{B(r)} \left(\frac{1}{\lambda} \right)_{in} \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda'}$$

Puis les ions et les électrons dérivent dans des directions opposées, il existe un courant diamagnétique - Pour $\gamma = 2/1$, 2 et

$$D = n/q \left(w_{D_i} - w_{D_e} \right) = n/q \left(k T_i + k T_e \right) \frac{B \lambda D_n}{n/q B^2}$$

$$D = (k T_i + k T_e) \frac{B \lambda D_n}{B^2}$$

— n —