

Mécanique des fluides

§1 Introduction

La mécanique des fluides est l'étude du mouvement et des déformations des fluides en fonction des forces et des conditions aux bords qui leur sont appliquées. Un fluide est souvent décrit comme une substance qui prend la forme de son contenant compatible avec son volume. On pourra définir un fluide comme un corps qui commence à se déformer quand une force lui est appliquée et continue à se déformer tant que la force est appliquée. On distingue la force de surface et de volume (gravité par exemple). Dans un fluide, le champ des vitesses est continu par rapport aux variables d'espace.

La dynamique d'un fluide diffère de la dynamique des corps élastiques par les aspects suivants :

1. Les déplacements de particules dans un fluide peuvent être importants même si les forces mises en jeu sont faibles.

2. la viscosité (force de friction interne) influence le flux de manière importante.

Grandeurs Fluides

Masse volumique. Valeur de grandeurs à 20°C

Alcool $\rho = 789 \text{ kg/m}^3$

Benzène 902

Glycérine 1258

Kérosène 809

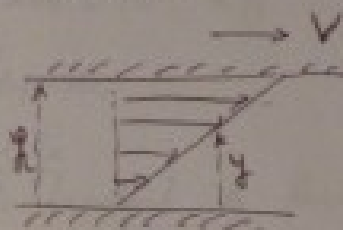
Mercur 13550

Eau 998

Les masses volumiques, pour un liquide, peuvent varier légèrement en fonction de la pression et de la température - la exception où la constante peuvent être rencontrées quand le liquide est rapidement freiné ou accéléré, ou bien pour des vitesses de grande profondeur.

Viscosité.

Cette grandeur mesure la faculté du fluide à transmettre la force de torsion.



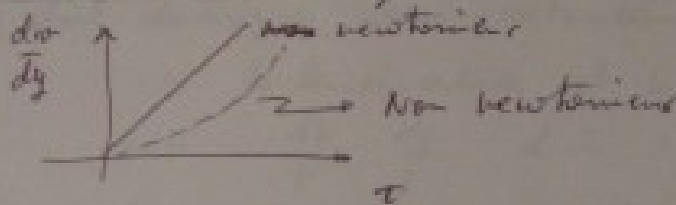
Par exemple, si on considère un fluide au repos entre 2 plaques puis on met en mouvement la plaque inférieure, le fluide se met en mouvement. Expérimentalement, on trouve que $v = ay$ (profil de vitesses) avec $a = \frac{V}{h}$ et la force F que l'on doit appliquer à la plaque inférieure est $F \propto \frac{AV}{h}$ où A est l'aire de la plaque (à signifier proportionnel).

La force par unité de surface est $\tau = \frac{F}{A} = \frac{V}{h} = \frac{d\sigma}{dy}$
 La viscosité dynamique est par définition

$$\mu = \frac{\tau}{d\sigma/dy} \quad [F \cdot T \cdot L^{-2}] \quad N \cdot s/m^2$$

$$1 \text{ poise} = 0,1 \text{ N} \cdot s/m^2$$

Fluide newtoniens $\mu = \text{cte}$



L'eau, l'huile et l'air sont newtoniens - le sang, la peinture sont non newtoniens. On ne considère que les fluides newtoniens.

Viscosité cinématique

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (m^2/s)$$

$$\text{Unité : Stokes} = 10^{-4} m^2/s$$

$$\nu_{\text{gaz}} > \nu_{\text{liquide}}$$

Compressibilité

Elle traduit la faculté du fluide de modifier le volume occupé en fonction des pressions exercées. En fait, on mesure les modifications de masse volumique et on définit le volume de compressibilité par

$$K = \frac{dp}{d\rho/p} \quad (N/m^2)$$

E_m

$T(^{\circ}C)$	$E (x 10^{-9}) N/m^2$
0	2,02
20	2,20
50	2,30
100	2,04

Remarque: Les gaz ont un β plusieurs milliers de fois plus grand que les liquides. Cette compressibilité n'a guère d'effet sur le flot car le flot a une vitesse finie par rapport à la vitesse du son dans le fluide en question. Quand on considère les problèmes de compressibilité, on doit distinguer deux situations:

1. la température est maintenue constante
ou $\frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho}$ d'où $E = \gamma p$

2. Pas d'échange de chaleur (processus adiabatique)

$\frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho}$ On a alors $E = \gamma p$

$\gamma = 1,4$ pour l'air et les gaz diatomiques

$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ C_p, C_v : chaleurs spécifiques γ premier constant, γ volume constant.

— N —

§2 Dynamique des fluides idéaux

On appelle fluide idéal des fluides sans friction interne et donc qui ne sont pas le siège de transformation d'énergie mécanique en chaleur.

§2.1 cinématique des fluides idéaux

2.1.1 représentation eulérienne et lagrangienne du mouvement fluide

Le mouvement fluide est complètement déterminé si on connaît ρ , la pression p , la ^{massique} ρ , la température et d'autres paramètres sont spécifiés comme des fonctions des coordonnées et du temps. C'est la voie eulérienne de représentation du mouvement. Ici, on fixe son attention sur un point de l'espace et on suit les variations temporelles de ρ , p , etc. en ce point. Alternativement, non fixé à temps, on peut déterminer les variations spatiales des mêmes paramètres. Cependant, il n'y a aucune information sur le mouvement d'une "particule fluide" donnée dans cette représentation. On appelle "particule fluide" un élément élémentaire de fluide.

Dans une représentation lagrangienne, les paramètres, notant la coordonnée des particules fluides x_i ($i=1,2,3$) sont spécifiés en termes du temps t et d'un certain vecteur $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ qui identifie une particule donnée du fluide. $x_i = x_i(\xi_k, t)$, $p = p(\xi_k, t)$, $\rho = \rho(\xi_k, t) \dots$ les variables $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ sont habituellement prises comme les coordonnées d'une particule fluide à un instant initial donné t_0 c'est-à-dire $\xi_i = x_i(\xi_k, t_0)$.

La transition d'une représentation à l'autre n'est pas en général simple. Par exemple, si le premier $p_L(\xi_k, t)$ est comme dans une représentation lagrangienne et si on donne comme cette quantité dans la représentation eulérienne c'est-à-dire $p_E(x_k, t)$ au point $\{x_i\}_{i=1,2,3}$, on doit

vraie la relation

l'équation $x_i = x_i(\xi_k, t)$ pour ξ_k impliquant

$$p_E(x_k, t) = p_L(\xi_i(x_k, t), t)$$

On voit que la solution $\xi_i(x_k, t)$ existe si le jacobien de la transformation est non nul i.e

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} = \det \left\{ \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} \right\} \neq 0$$

Le choix de la représentation dépend du problème posé. Avec de nombreux appareillages permettront de mesurer les grandeurs fluides en un point donné donc permettant une description eulérienne. D'autre part, la description lagrangienne est préférable si on s'intéresse à des processus de diffusion convectés à des transferts de matière.

2.1.2 Dérivée convective

Dans la représentation lagrangienne, la dérivée partielle d'une fonction par rapport au temps exprime son changement d'état pour une particule de fluide donnée. En particulier

$v_i = \frac{\partial x_i}{\partial t}$ est la vitesse et $\frac{\partial v_i}{\partial t}$ l'accélération d'une particule.

Dans la représentation eulérienne, la dérivée $\frac{\partial v}{\partial t}(x_0, t)$ est l'accélération de la particule qui à l'instant t est au point $\{x_0\}$.

Exemple : dans un chute d'eau, le niveau est un point fixe et constante $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(\vec{x}_k, t) = 0$ mais les particules sont accélérées par la force de gravitation.

On va donner une expression de l'accélération dans la représentation eulérienne - Considérons la particule fluide qui est au point $\{\vec{x}_k\}$ à l'instant t . La même particule sera au point $\{\vec{x}_k + \Delta \vec{x}_k\}$ au temps $t + \Delta t$. La i^{th} composante de l'accélération est :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_i(\vec{x}_k + \Delta \vec{x}_k, t + \Delta t) - v_i(\vec{x}_k, t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ v_i(\vec{x}_k, t) + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \Delta x_k + \frac{\partial v_i}{\partial t} \Delta t - v_i(\vec{x}_k, t) \right\}$$

Sachant que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{x}_k}{\Delta t} = \vec{v}_k$$

on a :

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) v_i$$

on peut former vectoriellement

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v}$$

de façon analogue, on peut obtenir le taux de changement dans le temps de toute quantité vectorielle en relation connectée à une particule donnée. Une telle dérivée est appelée conventive ou matérielle; c'est aussi la dérivée le long de la trajectoire. Elle est notée $\frac{df}{dt}$ (aussi notée $\frac{Df}{Dt}$)

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}$$

$\downarrow$ dérivée locale
 $\downarrow$ dérivée convective

Dans la suite, on utilisera essentiellement la représentation eulérienne.

La dérivée convective d'une intégrale étendue sur un volume V se déplaçant avec le fluide et donc contenant la même nombre de particules à tout instant est nulle

Soit $I = \int_V F(x_i, t) dV$

Soit à calculer $\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V F dV$

on effectue l'intégration en utilisant les variables lagrangiennes $x_i = x_i(\vec{F}_0, t)$. Dans ces variables, l'intégration est étendue sur un volume fixe V_0 (portion de V à l'instant $t=0$) à tout instant.

On a donc commutateur d'opérations de dérivation et d'intégration et

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_0} \bar{F} J d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = \int_{V_0} \frac{d}{dt} (\bar{F} J) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$$

où J représente le jacobien de la transformation lagrangienne euclidienne. En utilisant aux variables euclidiennes dans l'intégrale, on a

$$\frac{dI}{dt} = \int_V \frac{1}{J} \frac{d}{dt} (\bar{F} J) dV = \int_V \left(\frac{d\bar{F}}{dt} + \frac{\bar{F}}{J} \frac{dJ}{dt} \right) dV$$

Donc

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \bar{F} dV = \int_V \left[\frac{\partial \bar{F}}{\partial t} + (\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) \bar{F} + \bar{F} (\operatorname{div} \vec{\sigma}) \right] dV$$

————— μ —————

Exercice : montrer que

$$\frac{1}{J} \frac{dJ}{dt} = \operatorname{div} \vec{v}$$

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}$$

où J est le jacobien de la transformation des coordonnées cartésiennes aux coordonnées lagrangiennes.

Réponse : Soit $\vec{v}_i = \frac{dx_i}{dt}$ et

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} + \frac{\partial(x_1, v_2, x_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} + \frac{\partial(x_1, x_2, v_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}$$

Soit $v_i = v_i^j(x_k(\xi_m, t), t)$ d'où

$$\frac{\partial v_i}{\partial \xi_j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_j}$$

On développe chaque jacobien en 3 termes de 3 termes

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} \\ &\quad + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} J$$

idem pour

$$\frac{\partial(x_1, v_2, x_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} J \quad \text{et} \quad \frac{\partial(x_1, x_2, v_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} = \frac{\partial v_3}{\partial x_3} J$$

$$\text{d'où} \quad \frac{dJ}{dt} = J \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = J \operatorname{div} \vec{v} = \frac{dJ}{dt}$$

§ 2.2 Système d'équations de l'hydrodynamique

§ 2.2.1 Equation de continuité

Une équation fondamentale du mouvement fluide est l'équation de continuité ou loi de conservation de la matière. Elle est déduite du fait évident que le nombre de liquide dans un volume contenant le même nombre de particules à tout instant est constante. Ceci implique

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0$$

Utilisant la relation (2.1), on recrit (2.2) sous la forme

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho + \rho \operatorname{div} \vec{v} \right) dV = 0$$

Pour que cette relation soit vraie pour $\forall V$, l'intégrand doit aussi s'annuler. On obtient alors l'équation de continuité dans les variables eulériennes qui peut être écrite sous 3 formes différentes

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \end{array} \right.$$

§ 2.2.2 l'équation d'Euler

l'équation du mouvement fluide ou l'équation d'Euler peut être obtenue à partir de la seconde loi de Newton qui établit que le taux de changement dans le temps du moment d'un (ou quantité de mouvement) d'un volume fluide est égale à la résultante des forces agissant sur ce volume, c'est à dire:

$$(2.5) \quad \frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV = \vec{F} + \vec{F}_S$$

où $\vec{F} = \int_V \rho \vec{f} dV$ est une force externe (f est une force par unité de masse), $\vec{F}_S$ étant la force exercée par le fluide entourant le volume V . Cette force est égale (et de signe opposé) à la force avec laquelle le volume agit sur le milieu environnant. Pour un fluide idéal (pas de forces de viscosité)

$$(2.6) \quad \vec{F}_S = - \int_S p \vec{n} dS$$

où p est la pression, S la surface entourant le volume V et $\vec{n}$ est la normale extérieure à S .

Où, à l'aide du théorème de la divergence vectorielle

$$2) \quad \vec{F}_S = - \int_S p \vec{n}^2 dS = - \int_V (\vec{\nabla} p) dV$$

on a donc, d'après la relation générale (2.1),

$$\begin{aligned} 3) \quad \frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV &= \int_V \left[\frac{d}{dt} (\rho \vec{v}) + (\rho \vec{v}) \operatorname{div} \vec{v} \right] dV \\ &= \int_V (-\vec{v} p + \rho \vec{f}) dV \end{aligned}$$

On peut utiliser l'équation de continuité (on recrée l'intégrant du 2^e membre de (2.8))

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\rho \vec{v}) + (\rho \vec{v}) \operatorname{div} \vec{v} &= \rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} \right) \\ &= \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) \end{aligned}$$

Comme le volume est arbitraire, on se détermine

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{f}}$$

c'est l'équation d'Euler.

§ 2.2.3 Termeture du système d'équations

Cette dernière équation avec l'équation de continuité

représente donc 4 équations scalaires pour 5 inconnues
(soit S , pression p , et les 3 composantes de la vitesse $\vec{v}$)
Dans le système restait par conséquent

L'équation d'état

$$p = p(S, \rho)$$

où S est l'entropie

ainsi que l'équation pour l'entropie doit être ajoutée au système. On va supposer que l'entropie d'un volume de fluide donné est constante c'est à dire

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} S = 0$$

Cela ne signifie pas que l'entropie en un point donné
reste constante dans le temps.

L'entropie peut être éliminée de ces relations. On calcule la dérivée convective de p et on note

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S$$

Donc

$$\frac{dp}{dt} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \frac{d\rho}{dt} + \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_\rho \frac{dS}{dt}$$

$\downarrow$
 $= 0$

D'où

$$\frac{dp}{dt} = c^2 \frac{d\rho}{dt}$$

$$c = c(p, \rho)$$

c est appelée entée du son $c = c(p, \rho)$

c est une fonction de la pression et de la température

Dans le cas le plus simple où l'entropie est constante dans l'espace, c'est l'équation d'état

a) $p = p(\rho)$

qui forme la système (Lagrange, Euler). la fonction $p(\rho)$ dépend des propriétés du fluide considéré. En particulier pour l'équilibre adiabatique, le gaz parfait, l'équation d'état est

$$p V^\gamma = \text{cte} \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v} \quad \text{rapport de chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constant}$$

et V est le volume de l'unité de masse ie $V = \frac{1}{\rho}$. On a donc $\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma}$ ie $p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma$.

Le système d'équations

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \left(\text{ou} \quad \frac{dp}{dt} + \operatorname{div}(p\vec{v}) = 0 \right)$$

$$\text{Euler} \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad \text{ou} \quad p = p(\rho)$$

avec les conditions aux bords appropriées déterminent le mouvement du fluide complètement. A une frontière, avec un corps solide au repos, la composante normale de la vitesse v_n doit être nulle.

La force gravitationnelle $\vec{F} = \vec{g}$ ($\vec{g}$ étant le vecteur accélération gravitationnelle dirigée vers le centre de la Terre, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$) est un exemple typique de force extérieure dans l'équation d'Euler. Cette équation peut aussi inclure les forces d'attraction du Soleil et de la Lune (en particulier dans la théorie des marées).

Dans la dynamique des océans et de l'atmosphère, la rotation de la Terre joue un rôle important. Des termes additionnels doivent être inclus : la force centrifuge $\vec{F}_c = \Omega^2 \vec{r}$, Ω étant la valeur rotation de la Terre, et la force de Coriolis $\vec{F}_c = -2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$. Toutes ces forces, sauf Coriolis, dérivent d'un potentiel.

Fluides incompressibles : C'est le cas le plus important dans beaucoup d'applications. Dans ce cas, on a

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho = 0$$

(la densité de chaque particule fluide reste constante)
l'équation de continuité simplifiée alors

$$\text{div } \vec{v} = 0$$

§ 2.3 La statique des fluides.

Considérons un fluide au repos. $\vec{v} = 0$. On a alors l'équation de l'hydrostatique

$$7) \quad \vec{\nabla} p = \rho \vec{f}$$

Le cas où $\vec{f}$ dérive d'un potentiel est important. On a $\vec{f} = -\vec{\nabla} u$. Alors

$$8) \quad \vec{\nabla} p = -\rho \vec{\nabla} u$$

Cette relation montre que $\vec{\nabla} p$ doit être colinéaire avec $\vec{\nabla} u$.

En effet, en prenant le rotationnel du membre de gauche, on a

$$\text{rot}(\rho \vec{\nabla} u) = 0 = \vec{\nabla} \rho \wedge \vec{\nabla} u$$

Considérons à présent un fluide dans le champ gravitationnel

où $u = gz$, l'axe des z est dirigé vers le haut.

L'équation (2.18) devient :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$9) \text{ On a } \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

Cela implique que la pression ne dépend que de z :

$p = p(z)$: dans le cas le plus simple où ρ est constant, on a

$$p = -\rho g z + \text{cte}$$

Exercice 1: Donner la relation de la pression avec la hauteur
 pour une atmosphère isotherme,
 si la température varie avec la hauteur
 le gaz étant considéré parfait.
 $T = T(z)$. En considérant la cas

- 1) $T = T_0 = \text{cte}$
- 2) $T = T_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right)$ $z < h$.
- 3) $T = T_0 \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right)$ $z < h$.

Exercice 2: Donner la relation de la pression avec la hauteur
 pour une atmosphère isentropique si
 l'équation d'état est $p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma$

— v —

Réponse Exercice 1:

$$\vec{p} = \rho \vec{f}$$

$$\vec{f} = -\vec{\nabla} u$$

$$u = gz$$

Equation d'état

$$p = \frac{RT(z)\rho}{\mu}$$

avec notation
 μ : masse molaire du gaz
 R : constante universelle de gaz.

$$\frac{\mu}{R} = \frac{\rho_0 T_0}{p_0} \quad \text{si toute la quantité}$$

sont prises en $z = z_0 = 0$

les seules variations se font par rapport à z

On a alors

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = -g = -\frac{\rho_0 T_0 g}{p_0 T(z)}$$

$$\text{Donc } \frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0 T_0 g}{p_0 T(z)} dz$$

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 T_0 g}{p_0} \int_{z_0}^z \frac{dz}{T(z)}\right) \quad | \cdot = p(z_0) = p_0$$

3) $T = T_0 \rightarrow$ isotherm case.

$$a) T = T_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right)$$

$$\text{Also } T_0 \int_0^z \frac{dz}{T(z)} = T_0 \int_0^z \frac{dz}{T_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right)} = \int_1^{1-\frac{z}{h}} -h \frac{du}{u}$$

$$1 - \frac{z}{h} = u, \quad dz = -h du, \quad = -h \left[\log\left(1 - \frac{z}{h}\right) \right]$$

$$d) p(z) = p_0 \exp\left(+\frac{\rho_0 g h}{p_0} \log\left(1 - \frac{z}{h}\right)\right) =$$

$$p(z) = p_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^\gamma \quad \text{mit } \gamma = \frac{\rho_0 g_0 h}{p_0}$$

$$e) T(z) = T_0 \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right)$$

$$T_0 \int_0^z \frac{dz}{T(z)} = \int_0^z \frac{dz}{T_0 \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right)} = \frac{h}{2} \log \left| \frac{1 + \frac{z}{h}}{1 - \frac{z}{h}} \right|$$

$$\text{Also } p(z) = p_0 \left(\frac{1 + \frac{z}{h}}{1 - \frac{z}{h}} \right)^\gamma \quad \text{mit } \gamma = \frac{h}{2} \frac{\rho_0 T_0 g}{p_0}$$

Reynolds Equation:

$$p = p_0 \left(\frac{z}{z_0} \right)^{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{z}{z_0} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\rho(p) g$$

Divide

$$\frac{dp}{dz} = -\rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} g \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} = -\rho_0 g dz$$

$$\int_{p_0}^p dp \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \int_1^u p_0 du u^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} = p_0 \frac{1}{\left(-\frac{1}{\gamma-1} + 1 \right)} \left[u^{-\frac{1}{\gamma-1} + 1} \right]_1^u$$

$$\frac{p}{p_0} = u = \frac{p}{p_0} \left(u^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)$$

Divide

$$\frac{\gamma p_0}{\gamma-1} \left(\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) = -\rho_0 g z$$

$$\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 - \frac{\rho_0 g (\gamma-1) z}{\gamma p_0}$$

$$p = p_0 \left(1 - \frac{\rho_0 g (\gamma-1) z}{\gamma p_0} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

§ 2.4 Principe de conservation

§ 2.4.1 Théorème de Bernoulli.

Le théorème s'applique dans le cas d'un fluide stationnaire,

$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$, dans le cas d'un fluide dit "barotrope"

c'est-à-dire par lequel on a une relation d'état $p = p(\rho)$.

On part de l'équation d'Euler (avec $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$) et on utilise la relation

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) - \vec{v} \wedge \text{rot} \vec{v}$$

On introduit une nouvelle fonction w appelée enthalpie

$$w = \varepsilon + p \bar{V} = \varepsilon + \frac{p}{\rho} \quad \text{T volume de l'unité de masse}$$

où ε est l'énergie interne par unité de masse. On a alors

$$dw = d\varepsilon + \frac{dp}{\rho} - \frac{p}{\rho^2} d\rho$$

Dans le cas d'une entropie constante ($ds=0$) qui nous donne ici, la différentielle d'énergie interne

$d\varepsilon$ qui est $d\varepsilon = Tds - p d\bar{V}$ sera ici

$$d\varepsilon = -p d\bar{V} = -\frac{p}{\rho^2} d\rho$$

Non, avec donc, pour la différentielle d'enthalpie

$$b) \text{ ou } d\psi = \rho \frac{dy}{\rho} + \frac{dy}{\rho} - \frac{\rho}{\rho} dy$$

$$d\psi = \frac{dy}{\rho}$$

A présent, on se rappelle que la force externe dépend d'un potentiel ($\vec{F} = -\vec{\nabla}u$) on peut écrire l'équation d'Euler

$$c) \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec{v} \nabla \text{rot} \vec{v} = -\vec{\nabla}u - \vec{\nabla}u$$

La courbe qui en chacun de ses points a une tangente cohérente avec le vecteur vitesse $\vec{v}$ est appelée ligne de courant. En général, les lignes de courant changent de forme avec le temps ~~mais dans le cas d'un mouvement stationnaire~~, ces lignes ^{coïncident} coïncident avec les trajectoires de particules fluides. On va projeter l'équation (2.26) sur une telle ligne de courant fixée en un point arbitraire.

$$\vec{v} \nabla \text{rot} \vec{v} \perp \vec{v} \rightarrow \text{projection nulle.}$$

$$\vec{\nabla}(\phi) \rightarrow \text{projection } \frac{d}{ds} \phi.$$



ds : élément de longueur sur la ligne de courant

Quand

$$2) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} + w + u \right) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{v^2}{2} + w + u = \text{cte} \quad (2.27 \text{ bis})$$

donc la quantité $\frac{v^2}{2} + w + u$ est constante le long de la ligne de courant. C'est le théorème de Bernoulli. la constante est variable le long de la ligne de courant considérée.

Dans le cas particulier d'un écoulement potentiel on a $\vec{\omega} = 0$ ma

$$\nabla \left(\frac{v^2}{2} + w + u \right) = 0$$

$$\frac{v^2}{2} + w + u = \text{cte} \quad \text{partout dans le fluide}$$

Dans le cas d'un fluide incompressible, ($\rho = \text{cte}$), on définit

$$\text{de} \quad dw = \frac{dp}{\rho} \quad \text{que} \quad w = \frac{p}{\rho} \quad (\rho = \text{cte})$$

Alors, l'équation (2.27 bis) devient :

$$2) \quad \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + u = C_1$$

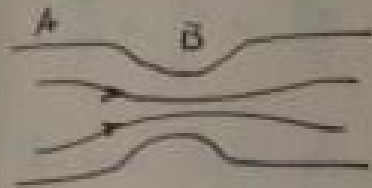
qui dépend de la ligne de courant.

————— 11 —————

§ 2.4.2 Applications du théorème de Bernoulli

Dispositif de Venturi : mesure de vitesse de flot.

On considère un flot d'un fluide incompressible ^(incompressible) et stationnaire dans un tube présentant un étranglement. (voir figure 2). On a $\text{div } \vec{v} = 0$



- figure 2 -

la vitesse dans la section A
(ainsi que dans la section B)
^{apparente}
est la même en tout le point de cette section.

§ comme $\vec{v}$ est constant sur toute longueur de la section, on en déduit :

$$v_1 S_1 = v_2 S_2$$

v_1 vitesse dans section A
 S_1 aire ———
 v_2 vitesse ——— B
 S_2 aire ———

D'autre part, sur toute les lignes de courant passant par des points des sections A et B on a Bernoulli (incompressible)

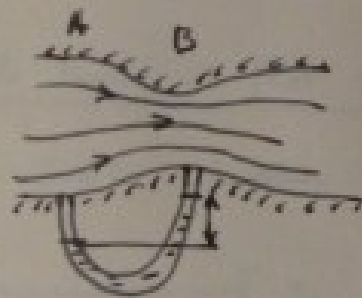
$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + u = \text{cte}$$

où u potentiel de force conservatives (gravitation etc)

Quand on passe d'un ligne de courant à une autre, on peut estimer que le saut est peu. De même, quand on passe d'un point de la section A à un point de la section B d'une même ligne de courant, on peut estimer que le saut est peu. On a alors

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} \quad \text{sur une même ligne de courant.}$$

Pour une ligne de courant proche de la paroi, on peut mesurer la différence $p_2 - p_1$ en connectant par un tube rempli de mercure les 2 sections A et B, et en mesurant la différence



de hauteurs de 2 colonnes d'eau

Sachant que

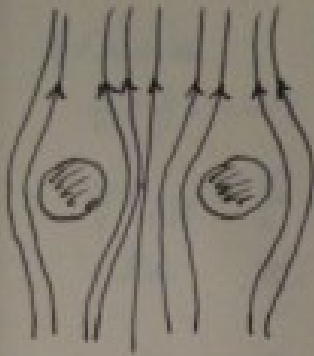
$$v_1 S_1 = v_2 S_2$$

on deduit

- figure 2 -

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1 \right)}}$$

Autre exemple. Soient 2 cylindres placés perpendiculairement à un écoulement bidimensionnel (voir figure 3)
 & incompressible, stationnaire

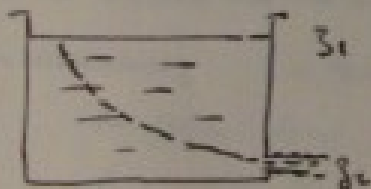


- fig. 4 -

On a certainement de même entre les 2 cylindres (= augmentation du niveau de liquide de devant. v.s. de D'après Bernoulli, la pression dans la région entre les 2 cylindres est plus faible qu'ailleurs dans le flot et donc une force d'attraction existe entre les 2 cylindres. Ce phénomène est très connu des ~~capit~~ navigateurs car 2 navires se déplaçant dans la même direction s'attirent l'un l'autre. Cela peut donner lieu à des collisions.

Modèle simple de flot s'échappant d'un récipient

Soit la situation suivante (voir figure 5)



Considérons une ligne de courant connectant la surface libre d'un liquide situé dans un récipient et un trou effectué dans le récipient. Soient z_1 et z_2 les hauteurs respectives des surfaces libres et du trou. En $z = z_1$, $p = p_0$ (la pression atmosphérique) et $v_1 \approx 0$ (malgré le fluide qui s'échappe, on peut estimer que $v_1 \approx 0$). Au niveau du trou, $v_1 = v_2$ et $p = p_0$ (la pression atmosphérique n'a pas sensiblement varié)

A l'aide de

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + u \cdot \vec{e}_z \quad (\text{comme même ligne de courant}) \text{ on a } u = gz$$

$$\frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2$$

30)

$$\text{Donc } v_2 = \sqrt{2g(z_1 - z_2)}$$

§ 2.5 Conservation de l'énergie

§ 2.5.1 Equation énergétique

La conservation de l'énergie signifie que l'énergie ne peut être ni créée ni détruite, ce que l'on exprime par le premier principe de la thermodynamique

31)

$$\Delta Q = \Delta E + \Delta W$$

où ΔQ est la quantité de chaleur créée ou créée par le système fluide, ΔE et ΔW sont les changements d'énergie et de travail effectués par le système fluide.

Considérons un volume donné de fluide, V . la quantité de travail, par unité de temps, échangée par le fluide dans V avec le milieu extérieur, est constituée de 2 termes (pour un fluide non visqueux). (Notations différentielles)

Un premier terme, dû aux forces de pression, qui est de la forme

32)

$$\int_{\partial(V)} p \vec{r} \cdot d\vec{S}$$

Un deuxième terme, noté $\frac{dW_{ext}}{dt}$, qui décrit les échanges avec le milieu extérieur (Ex: pompe qui agit sur le fluide $\frac{dW_{ext}}{dt} < 0$ ou fluide qui agit sur une turbine $\frac{dW_{ext}}{dt} > 0$). On a alors

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dW_{ext}}{dt} + \int_{S(V)} p \vec{v} \cdot d\vec{S} + \frac{dE}{dt}$$

On appelle e l'énergie par unité de masse, cette énergie est composée de 3 termes : énergie cinétique $\frac{v^2}{2}$, énergie potentielle u et énergie interne E

2) bio $e = \frac{v^2}{2} + u + E$

et donc

$$E = \int_V e g dV$$

On a vu que

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_V e g dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (e g) dV + \underbrace{\int_V (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) e g + e g (\text{div} \vec{v}) dV}_{= \int_V \text{div} (e g \vec{v}) dV} \\ &= \int_{S(V)} e g \vec{v} \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

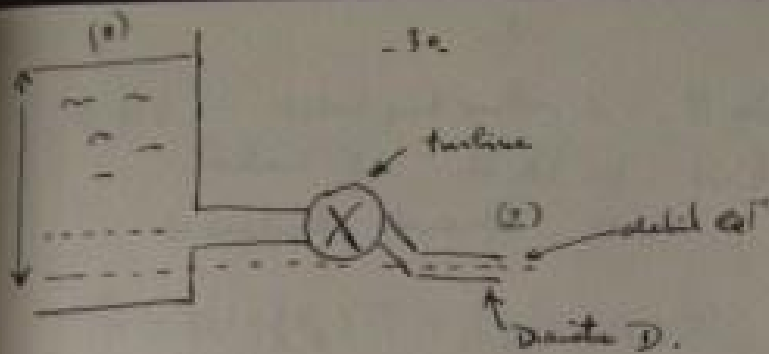
On a donc

$$\boxed{\frac{dQ}{dt} - \frac{dW_{ext}}{dt} = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (e g) dV + \int_{S(V)} (p + e g) \vec{v} \cdot d\vec{S}}$$

c'est l'équation énergétique

§ 2.5.2 Application : ~~Actions~~ Actions de pompe et turbine.

Considérons la situation stationnaire suivante. Il y a l'écoulement dans un bassin suffisamment grand actionné par l'intermédiaire d'une canalisation une turbine. Connaissant la hauteur du bassin et la géométrie de la canalisation, trouver la puissance développée dans la turbine. (de début à la sortie).



La surface libre du bassin peut être considérée comme insolable ($v_z = 0$)
 On peut imaginer un tube de flux avec section 1, la section plane
 de section 2. la section 2 le fluide s'écoule dans l'atmosphère
 de diamètre D. Le fluide est ici considéré incompressible

$$\text{Débit } Q = \int_{S_2} \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (\text{est égal à } \int_{S_1} \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad \text{si } v_z = 0 \text{ sur } S_1)$$

Appliquons la loi de conservation de l'énergie; on va supposer
 que les échanges de fluide avec l'extérieur ne font pas modification
 de l'énergie. Donc $\frac{dE}{dt} = 0$. Dans le cas stationnaire, on a donc

$$-\frac{dE_{\text{ext}}}{dt} = -P_T = \int_{S(v)} (p + \rho g) \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

$\downarrow$
 Puissance de la turbine

Entre les sections 1) et 2) on peut considérer que l'énergie interne E
 ne varie pas. On a donc, pour

$$P_1 = P_0 \text{ (pression atmosphérique) en 1 (à la section 1)}$$

$$S_1 = S_2 \quad "$$

$$v_1 = v_2 \quad "$$

$$P_1 = P_0 \quad "$$

$$S_1 = S_2 \quad "$$

$$v_1 = v_2 \quad "$$

$$P_1 = P_0 \quad "$$

section 2

$q_2 \approx 0$ car tout fait mieux 2. β diamètre et petit devant h
 Sachant que $\vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$ sur la frontière du volume
 de contrôle choisie, on a:

$$-P_T = -(p/\rho + g z_1) \Gamma + (p/\rho + g z_2) \Gamma$$

$$\text{avec } e_1 = \frac{v_1^2}{2} + gh + E_1 = gh + E_1$$

$$e_2 = \frac{v_2^2}{2} + E_2 \quad E_1 = E_2$$

$$\text{Donc } +P_T = +g \Gamma \left(gh - \frac{v_2^2}{2} \right) \quad \Gamma = v_2 S_2$$

$$\text{AN: } \Gamma = 19 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$D = 2 \text{ m.}$$

$$g = 998 \text{ kg/m}^3 \text{ (eau)}$$

$$h = 29 \text{ m.}$$

$$P_T = 998 \times 19 \times \left(9.81 \times 29 - \frac{(49)^2}{\pi \times 2^2} \right)$$

$$P_T = 5.05 \times 10^6 \text{ W} = 5.05 \text{ MW}$$

N.m/s

— N —

Remarque: A l'aide de (2-34), et en considérant le cas
 particuliers suivant,

- par échange de chaleur
 - par échange de travail
 - stationnaire
 - par la variation d'énergie interne
- On a: le long du fil (comme ρ, γ, T etc
 égaux par section transversale)

$$\text{iii) } \int_{S(r)} \left[p + \rho \frac{v^2}{2} + \rho u + \rho z \right] \vec{\sigma} \cdot d\vec{S} = 0$$

Cette formule peut être utilisée dans certains cas particuliers:

§ 2.6 Flux d'impulsion et forces exercées par un fluide sur les milieux extérieurs.

§ 2.6.1 Forme tensorielle des équations du mouvement.

On admet que $\rho \vec{v}$ est la quantité de mouvement (ou impulsion; ^{par unité de volume} en anglais) ~~La~~ variations par rapport au temps suit d'après l'équation d'Euler et l'équation de continuité (pour la $i^{\text{ème}}$ composante)

$$1) \quad \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial \rho}{\partial x_k} v_k - \rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + f_i - v_i \frac{\partial (\rho v_k)}{\partial x_k}$$

Les 2^{ème} et dernière terme peuvent être regroupés pour donner

$$\frac{\partial (\rho v_i v_k)}{\partial x_k} \quad \text{On peut écrire ainsi} \quad \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_k} (\delta_{ik} p)$$

où δ_{ik} est le symbole de Kronecker. On a donc

$$2) \quad \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_k} (p \delta_{ik} + \rho v_i v_k) + f_i$$

Soit le tenseur

$$3) \quad \pi_{ik} = p \delta_{ik} + \rho v_i v_k$$

On a donc

$$4) \quad \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} = - \frac{\partial \pi_{ik}}{\partial x_k} + f_i$$

On intègre cette équation sur un volume V fixé. On a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V (\rho v_i) dV = - \int_V \frac{\partial \pi_{ik}}{\partial x_k} dV + \int_V f_i dV$$

Rapd : Pour un vecteur $\vec{A}$ on a la relation de la divergence

$$\int_V \frac{\partial A_k}{\partial x_k} dV = \int_S A_k n_k dS$$

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int \vec{A} \cdot \vec{n} dS$$

n_k : composantes de la normale vers l'extérieur de S

Sur rapid sur les tenseurs:

Sous l'action d'une rotation dans l'espace à 3 dimensions, les composantes d'un vecteur $\{x_1, x_2, x_3\}$ se transforment en $\{x'_1, x'_2, x'_3\}$ tel que

$$x'_i = \sum_{k=1}^3 a_{ik} x_k \equiv a_{ik} x_k \quad a_{ik} = \cos(\widehat{x'_i, x_k})$$

On peut donc dire qu'un vecteur est une ensemble de 3 quantités qui se transforment sous l'action d'une rotation comme

$$B'_i = a_{ik} B_k$$

Un Tenseur (d'ordre 2) est un ensemble de 9 quantités g_{ik} qui se transforment suivant la loi

$$g'_{ik} = a_{il} a_{km} g_{lm}$$

On peut définir de la sorte des tenseurs d'ordre 3, 4, ..., p. tels

$g'_{ijk}, g'_{ijkl}, \dots$ qui se transforment suivant des lois qui généralement (2.40).

Pour trouver la relation de la divergence pour les tenseurs (d'ordre 2)

$$\int_V \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_k} dV = \int_{S(V)} g_{ik} n_k dS$$

on opère de la façon suivante. On considère le vecteur

$$A_k = g_{ik} B_i \quad \text{où } B_i \text{ est un vecteur constant arbitraire}$$

et on applique (2.34)

On a donc :

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_k} (g_{ik} B_i) dV = B_i \int_V \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ik} dV = \int_S g_{ik} B_i n_k dS$$

$$= B_i \int_S g_{ik} n_k dS$$

Comme les B_i sont arbitraires, chaque terme de la combinaison doit être égal dans les 2 expressions.

On a donc, dans notre cas

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho v_i dV = - \int_S \pi_{ik} n_k dS + \int_V \rho f_i dV.}$$

La variation dans le temps de l'impulsion du fluide dans V est égale au flux du tenseur π (appelé tenseur des flux d'impulsion) + forces extérieures. Si $f_i = 0$, on a

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho v_i dV = - \int_S \pi_{ik} n_k dS$$

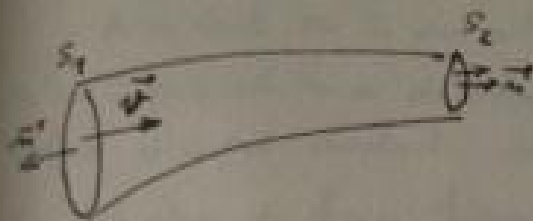
§ 2.6.2 Equation des impulsions - Forces exercées par le fluide

Pour établir le bilan de ces forces, considérons un flot stationnaire

On a donc :

$$\int_S \pi_{ik} n_k dS = \int_S (\rho \delta_{ik} + \rho v_i v_k) n_k dS = \int_V \rho f_i dV$$

et un tube de flux.



Pour les surfaces latérales d'un tube de flux, la quantité $\int p v_i v_k n_k dS$ car $v_k n_k = \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$. D'autre part, sur S_1 , on a

$$v_k n_k = -v \quad \text{et} \quad \vec{v} = -v \vec{n} \quad \text{donc} \quad v_i = -v n_i \quad \text{et}$$

$$p v_i v_k n_k = p v^2 n_i$$

D'autre part, sur S_2 , on a $v_k n_k = +v$ et $\vec{v} = v \vec{n}$ donc $p v_i v_k n_k = p v^2 n_i$ ou a donc

$$\int_V \rho f_i dV - \int_S p \delta_{ik} n_k dS = + \int_{S_1} p v^2 n_i dS + \int_{S_2} p v^2 n_i dS$$

n_i dirigé vers l'extérieur du tube

C'est la formule d'Euler.

$$\boxed{\Sigma F_i = \int_{S_1 + S_2} p v^2 n_i dS}$$

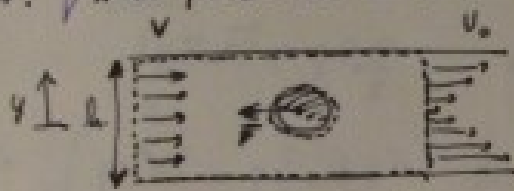
force intérieure
+ forces pression
agissant sur le tube $\equiv$ forces exercées sur le tube de flux

$$-\int p \delta_{ik} n_k dS = \int p \delta_{ik} (-n_k) dS = \text{force pression exercée sur l'intérieur}$$

§ 2.6.3 Application : Force sur un obstacle

On se trouve ici à une situation à 2 dimensions. Un objet est situé à égale distance de 2 plaques parallèles. Le flot en amont de l'objet est supposé constant alors que l'on mesure un flot et profil de vitesse de forme triangulaire en aval (voir figure)

Déterminer la force exercée par le fluide sur l'objet. On suppose que la pression est constante sur les sections en aval et en amont. V en fonction de la chute de pression dans le flot, de V et S .



La surface S délimitant le fluide et celle représentée en pointillés. Les forces extérieures agissant sur le fluide et en dehors de la zone de gravitation, la force de réaction exercée par l'obstacle, notée F horizontale et dirigée dans le sens contraire au flot. On a donc, la propulsion n'étant "n", la direction du flot

$$i = x \quad -F - \int_S p \delta_{ik} u_k dS = -F - \int_S p \delta_{ix} dS = -F + p_1 S - p_2 S$$

où p_1 et p_2 sont la pression en les sections avant et après l'obstacle.

$$= - \int_{S_1} \rho v^2 dS + \int_{S_2} \rho v^2 dS$$

La constante est égale à $\rho V^2 S$

Pour calculer la 2^e, il faut déterminer $v(y)$. On a $v(y) = U_0 \frac{y}{h}$ $y > 0$

$v(y) = -U_0 \frac{2y}{h}$ $y < 0$. On a donc, sur une $\frac{1}{2}$ section,

$$\int_0^{h/2} \rho v^2 dS = \int_0^{h/2} \rho U_0^2 \frac{y^2}{h^2} dy \times d = \frac{\rho U_0^2 d}{h^2} \frac{1^3}{3} = \frac{\rho U_0^2 h d}{3 \times 8} = \frac{\rho U_0^2 S}{6}$$

avec d tel que $h d = S$

$$\oint_{S_2} p \vec{v}^2 dS = \int_{S_2} \rho \frac{U_0^2}{2} \quad \text{par symétrie}$$

lien entre U_0 et V : relation compressibilité.

$$\oint_S p \vec{v}^2 dS = 0 = -\rho V S + \int_{S_2} p \vec{v}^2 \cdot d\vec{S}$$

Pour calculer, la 2^e est égale au la calculé sur une 1^{re} section

$$\int_0^{h/2} \rho v dy d = \int_0^{h/2} \rho \frac{U_0 y}{h} dy d = \rho \frac{U_0 d}{h} \int_0^{h/2} y dy = \frac{\rho U_0^2 S}{4}$$

Donc

$$\int_{S_2} p \vec{v}^2 dS = \int_{S_2} \rho \frac{U_0^2}{2} \quad \text{D'où } V = \frac{U_0}{2} \quad U_0 = 2V$$

$$\text{Et } \int_{S_2} p v^2 dS = \rho \frac{S}{2} v + V^2 \quad \text{On a donc}$$

$$\int_{S_1+S_2} p v^2 dS = -\rho V^2 S + \frac{4}{3} \rho V^2 S = \frac{1}{3} \rho V^2 S$$

On a donc

$$-F + (p_1 - p_2) S = \frac{1}{3} \rho V^2 S$$

$$\text{D'où } F = (p_1 - p_2) S - \frac{1}{3} \rho V^2 S$$

Autre exemple: Force exercée sur les parois d'une canalisation $\vec{F}_p$

Il s'agit de déterminer la force $\vec{F}_p$ exercée par le fluide sur la paroi latérale du tube (matérialisée)



D'après (4.5), on a :

$$= \vec{F}_{ext} \int_{S_1} p \vec{u} dS - \int_{S_2} p \vec{u} dS - \vec{F}_p$$

$$= \int_{S_1} p v^2 \vec{u} dS + \int_{S_2} p v^2 \vec{u} dS$$

$$\text{On a donc } \vec{F}_p = - \int_{S_1} (p + \rho v^2) \vec{u} dS - \int_{S_2} (p + \rho v^2) \vec{u} dS + \vec{F}_{ext}$$

§ 2.1 Flot compressible.

Dans cette section, on va considérer l'application de la loi de conservation précédemment obtenus dans le cas des gaz (perfect). On va plus particulièrement envisager le cas où le mélange de l'écoulement de gaz est l'écoulement sans viscosité. On a dit que le flot de gaz est adiabatique - la deuxième de Bernoulli, dans le gaz, est

$$\frac{v^2}{2} + w + u = \text{cte}$$

et w est l'enthalpie. En général, la variation d'enthalpie (enthalpie) est faible et donc $u \approx \frac{v^2}{2}$.

La formule (2.46) est prise sous une forme de courant de masse.

$$dw = \frac{dp}{\rho}$$

et dans le cas adiabatique

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \rightarrow dp = \frac{p_0 \gamma}{\rho_0^\gamma} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} d\rho$$

$$w = \int \frac{dp}{\rho} = \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \right) \frac{p_0}{\rho_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1}$$

$$\frac{dp}{\rho} = \frac{p_0 \gamma}{\rho_0^\gamma} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-2} d\rho$$

D'où, comme

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma = \frac{p_0}{\rho_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1}$$

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{p_0 \gamma}{\rho_0^\gamma} \frac{1}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1}$$

On a

$$w = \int \frac{dp}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho}$$

D'où finalement, sous une forme de courant

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = \text{cte}$$

Vitesse du son dans le gaz

L'entropie étant toujours supposée constante, la vitesse du son est définie comme

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \frac{dp}{d\rho} \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{p} = \gamma \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{\rho}$$

la relation d'état étant $p = p(\rho)$. Dans le cas adiabatique,

$$c^2 = \gamma \frac{p}{\rho}$$

Remarque si on au point de la ligne de courant $v=0$, on déduit de (2.49) la relation

$$v^2 = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p}{\rho} \right)$$

où p_0, ρ_0 sont la pression et la densité au la stagne stagnée (point d'arrêt)

Ce qui peut s'exprimer aussi, en terme de la vitesse du son

$$v^2 = \frac{2}{\gamma-1} (c_0^2 - c^2)$$

Remarque Par application de (2.49) entre 2 point d'une même ligne de courant et en utilisant (2.51), on peut montrer que

$$p_1 \cdot p_2 = \frac{\rho_1 (\rho_1^2 - \rho_2^2)}{2} \left[1 + \frac{1}{4} \frac{(\rho_1^2 - \rho_2^2)}{c_1^2} + \frac{2-\gamma}{14} \frac{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2}{c_1^4} + \dots \right]$$

On déduit de ce type de relation que si $\frac{v_1^2 - v_2^2}{c_1^2}$ est petit autrement dit, les vitesses du flot sont faibles par rapport à la vitesse du son, les effets de compressibilité sont faibles:

La formule de Bernoulli pour les flots incompressibles est valable.

Exemple, si $N_2 = 0$, on a

$$p_0 - p_1 = \frac{\rho_0 v^2}{2} \left(1 + \frac{1}{4} \gamma \alpha_1^2 + \frac{2-3}{24} \gamma \alpha_1^4 + \dots \right)$$

si α_1 est le nombre de Mach en point où la vitesse est v_1

$$\alpha_1 = \frac{v_1}{c_1}$$

$$p_0 - p_1 = 0.3 \text{ , on a } \frac{\Delta p_{\text{comp}} - \Delta p_{\text{incomp}}}{\Delta p_{\text{incomp}}} = 27\%$$

Remarque: La formule (2.49) peut être exprimée en fonction de la température si on admet que le gaz est un gaz parfait

$$\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{\mu}$$

R : constante universelle des gaz
 po. base molaire du gaz considéré.

Donc

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{RT}{\mu} = \text{cte}$$

On peut trouver dans la littérature, une expression pour (2.56) de forme différente

$$\frac{p}{\rho} = gRT \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} gRT = \text{cte} \quad gh = \frac{R}{\mu}$$

le produit de R qui est une constante

$$\mu g R = R$$

dépendant du gaz et du poids molaire

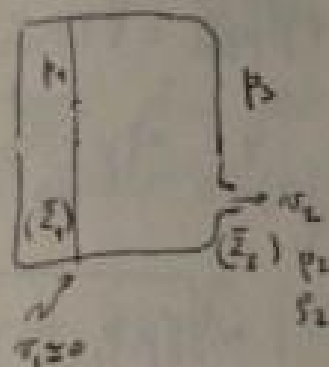
du gaz et est égal à la constante universelle des gaz

Air $R = 29,2 \text{ kJ/mol}$

$$\frac{p}{\rho} = gR_0 T$$

$$\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{\mu}$$

Soit à quant la situation suivante : un fluide gazeux s'échappe d'un réservoir à travers une ouverture. La pression à l'intérieur du réservoir est p_1 , la température T_1 et la pression p_1 . Le réservoir est supposé être de taille suffisamment grande par rapport à l'ouverture pour que la surface totale du fluide soit suffisante afin d'être considérée comme infinie. Il s'agit de calculer le débit massique en fonction de la section de l'ouverture S_2 de p_1 et T_1 , la pression extérieure est notée p_2 .



On a d'après Bernoulli

$$\frac{v_2^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{p_1}{p_2} \right) \left\{ \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right\}$$

Le nombre de Mach dans la section 2, est à déterminer dans le jet,

$$Ma_2 = \frac{v_2}{c_2} = \frac{v_2}{\sqrt{\gamma \frac{p_2}{\rho_2}}}$$

Donc

$$Ma_2^2 = \frac{2}{\gamma-1} \left\{ \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right\}$$

Si la vitesse du son est atteinte dans la gorge, alors on a $Ma_2 = 1$ et

$$\left(\frac{p_2}{p_1} \right)_{critique} = \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Ce rapport est indépendant de la forme du réservoir
et de la pression extérieure. On obtient ici que

$$\dot{p}_2 \text{ critique} > \dot{p}_3 \quad \text{pour le flot supersonique}$$

$$\dot{p}_2 \text{ le flot est subsonique}$$

$$\dot{p}_2 = \dot{p}_3$$

$$\text{le débit massique est } \dot{G} = \rho_2 v_2 S_2$$

Dans le cas d'un flot isotherme, $T_{12} = 1$ et $v_2 = C_2 = \sqrt{\gamma \frac{p_2}{\rho_2}}$

On obtient alors

$$\dot{G} = S_2 \left\{ \gamma \dot{p}_1 \rho_1 \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

— N —

§4. Fluides visqueux

§4.1 la équation de Navier Stokes.

Revenons à l'équation fondamentale qui établit le lien de dépendance entre le temps et la quantité de mouvement d'un volume fluide (se déplaçant avec le fluide et contenant le même ensemble de particules à tout instant)

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV = \vec{F} + \vec{F}_s$$

où $\vec{F} = \int_V \rho \vec{f} dV$ est une force interne, $\vec{F}_s$ étant une force de surface qui s'exerce dans le cas non visqueux $\vec{F}_s = - \int_S p \vec{n} dS$. Dans le cas plus général qui nous intéresse ici, cette force $\vec{F}_s$ prend la forme

$$\vec{F}_s = \int_S \vec{t}(\vec{n}) dS.$$

On peut montrer alors, par une analyse détaillée des contraintes, que $t_i(\vec{n}) = T_{ij} n_j$ et $T_{ij} = T_{ji}$. $\{T_{ij}\}$ est le tenseur des contraintes. Ce tenseur se décompose de la façon suivante

$$T_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij} \rightarrow \text{tenseur des contraintes visqueuses}$$

$$\downarrow$$

tenseur des contraintes $dF_{ij} = t_i(\vec{n}) dS$

ouverts à la pression $= T_{ij} n_j dS$

On a alors, d'après (4.1) $= (-p \delta_{ij} + \tau_{ij}) n_j dS$

Force exercée par le fluide sur la surface, pointé de la face $= (-p \delta_{ij} - \tau_{ij}) n_j$
 où τ_{ij} est le tenseur des contraintes visqueuses

1 par 1000 15 cm de (2.2) d(2.9)

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV = \int_V \frac{d\vec{v}}{dt} dV = \int_S \vec{T}(\vec{n}) dS + \int_V \rho \vec{f} dV$$

on en considérant chaque composante

$$\begin{aligned} \int_V \frac{dv_i}{dt} dV &= \int_S t_i(\vec{n}) dS + \int_V \rho f_i dV = \int_S T_{ij} n_j dS + \int_V \rho f_i dV \\ &= \int_V \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} dV + \int_V \rho f_i dV \end{aligned}$$

on a utilisé la formule (2.40) via la formule de Green des tenseurs. D'après (4.2), on a, le volume V étant arbitraire.

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \underbrace{\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}} + \rho f_i \quad (= \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v_i \right))$$

Tenseur différentiel dans
l'équation d'Euler

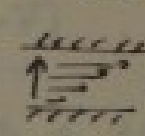
on peut écrire la version vectorielle du système (4.3)

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{f} + \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}}$$

$$\begin{aligned} &\text{divergence d'un tenseur} \\ &= \text{vecteur} \quad (\vec{\nabla} \cdot \vec{\tau})_i = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \end{aligned}$$

Il s'agit à présent de déterminer la dépendance du tenseur $\vec{\tau}$ par rapport aux composantes de la vitesse du fluide. On a déjà vu que les forces visqueuses se produisent uniquement quand des parties du fluide se déplacent à des vitesses différentes.

la tension τ_{ij} ne peut dépendre que des gradients des vitesses et non des vitesses elles-mêmes. Dans l'exemple le plus simple d'un flot linéaire entre 2 plaques, $v_x(y) = v_0 \frac{y}{h}$, la force par unité de surface $\frac{F}{S}$ est proportionnelle à v_0 et inversement proportionnelle à h i.e. $\frac{F}{S} = \mu \frac{v_0}{h} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y}$ / τ_{xy} qui a la signification d'une force par unité de surface et donné ici par

$$\tau_{xy} = \frac{F}{S} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y}$$


Si on suppose que ces gradients sont petits, on peut écrire $\tau_{ij} = \tau_{ij}^0 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$ en un développement par rapport aux gradients. D'autre part, les forces doivent être nulles si le fluide peut tourner comme un corps solide. Ceci signifie que τ_{ij}^0 ne dépend que des combinaisons suivantes

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v_k}{\partial x_l}$$

Ces termes sont nuls si le fluide est en rotation rigide. En effet, si c'est le cas, on a $\vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \vec{r}$ ($\vec{r}$: position d'une particule fluide, origine au l'axe de rotation). On a alors, avec

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \Omega_2 \\ \Omega_3 \\ \Omega_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_2 x_3 - \Omega_3 x_2 \\ \Omega_3 x_1 - \Omega_1 x_3 \\ \Omega_1 x_2 - \Omega_2 x_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial v_i}{\partial x_l} = 0$$

D'autre part, $\frac{\partial v_i}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_i} = -\Omega_3 + \Omega_3 = 0$ (etc...)

L'expression la plus générale d'une dépendance linéaire est

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \mu' \frac{\partial v_k}{\partial x_l} \delta_{ij}$$

1 $= \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ dans le cas incompressible

où μ est appelé coefficient de viscosité dynamique. En fait, on a $\mu' = \frac{2}{3}\mu$. On a alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} &= \mu \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) - \frac{2\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} \vec{v}) \delta_{ij} \\ &= \mu \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} \vec{v}) \right) - \frac{2\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} \vec{v}) \\ &= \mu \Delta v_i + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} \vec{v}) \end{aligned}$$

Donc, on obtient l'équation dite de Navier-Stokes :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{f} + \mu \Delta \vec{v} + \frac{\mu}{3} \vec{\nabla} (\operatorname{div} \vec{v})$$

Dans le cas d'un fluide incompressible, $\operatorname{div} \vec{v} = 0$, et on a

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{f} + \mu \Delta \vec{v}$$

§ 4.2 Exemples de flots de fluides visqueux (incompressibles)

§ 4.2.1 Equations générales des écoulements parallèles

Dans un écoulement parallèle, une seule composante des vitesses vitesses est ^{non} nulle et toutes les particules ont des trajectoires parallèles. Soit un écoulement parallèle à l'axe des



$$u \neq 0$$

$$v = 0$$

$$w = 0$$

$$u = v_x, v = v_y, w = v_z$$

$$\text{avec } u = u(x, y, z, t)$$

De l'équation de continuité (ou div $\vec{v}$) on tire

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad u = u(y, z, t)$$

L'équation de Navier Stokes projetée sur les axes y et z donne

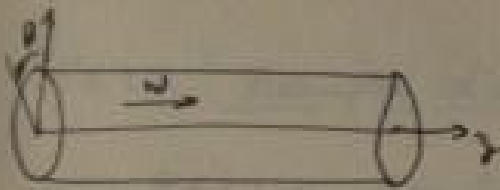
$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (\text{donc le comp de pesanteur } \approx 0)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad \text{et donc } p = p(x, t)$$

Navier Stokes sur "x" pour de l'air, avec $\nu = \frac{\mu}{\rho}$: viscosité cinématique

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

Dans un conduit cylindrique, et en coordonnées cylindriques, l'écoulement est supposé tel que vitesse radiale v_r et azimutale (ou tangentielle v_θ) sont nulles. Il ne reste que la composante longitudinale $w \neq 0$



$\text{div } \vec{v} = 0$ implique $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$ Soit $w = w(r, \theta, t)$

N.S. projeté dans les directions radiales et tangentielle

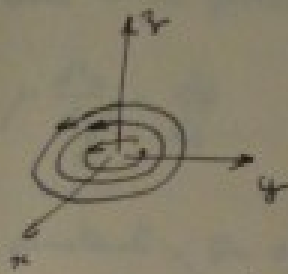
$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$$

$$\text{et } p = p(z, t)$$

N.S. dans la direction longitudinale.

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right]$$

Ecoulement en rotation autour de l'axe des z .



$$u = 0 \quad (\text{radiale})$$

$$v = v(r, \theta, z, t) \quad (\text{tangentielle})$$

$$w = 0 \quad (\text{longitudinale})$$

Continuité $\frac{\partial v}{\partial \theta} = 0$ et donc $v = v(r, z, t)$

NS $\rightarrow$ direction radiale et longitudinale

$$\frac{v^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$$

$$0 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

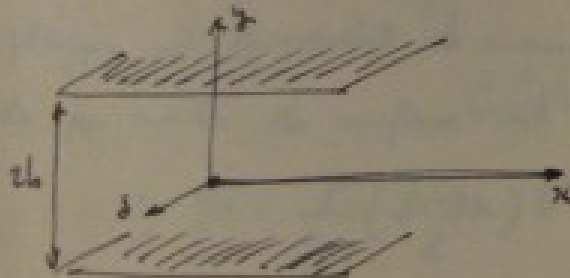
NS $\rightarrow$ direction tangentielle

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + v \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right\}$$

§ 4.2.2 Exemples d'écoulements parallèles

§ 4.2.2.1 Écoulement de Poiseuille plan.

C'est un écoulement dans un conduit limité par 2 plans distants de $2b$, les 2 plans étant infinis.



le problème étant invariant par translation par rapport à z .

toutes les quantités ne peuvent pas dépendre de y . L'on s'intéresse à un problème stationnaire, on déduit de (4.9)

$$(2) \quad \mu \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{dp}{dx} \quad u = u(y) \quad p = p(x)$$

Ceci n'est possible que si les 2 membres sont constants. On obtient donc

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 + C_1 y + C_2$$

avec les conditions aux bords $y u(b) = u(-b) = 0$. On en déduit

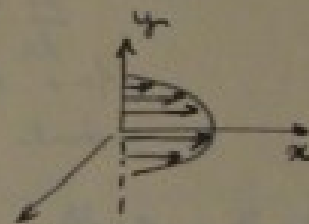
$C_1 = 0$ et $C_2 = -\frac{1}{2\mu} \left(\frac{dp}{dx} \right) b^2$. On obtient alors le profil parabolique

$$(3) \quad u(y) = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (b^2 - y^2)$$

La vitesse moyenne est

$$\bar{u} = \frac{1}{2b} \int_{-b}^b u(y) dy$$

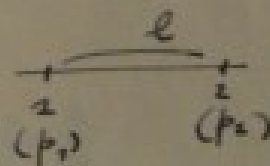
$$= -\frac{1}{3\mu} \frac{dp}{dx} b^2 = \frac{2}{3} u_M$$



où $u_M = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} b^2$ est la

vitesse maximum sur l'axe $y=0$

Souvent, on connaît $-\frac{dp}{dx} = \frac{p_1 - p_2}{l}$



qui mesure la chute de pression entre les 2 plaques et le débit de même de fluide par unité de surface $\bar{u}$ traversant une section droite.

$$(4) \quad \bar{u} = \frac{\rho}{3\mu} \left(\frac{p_1 - p_2}{l} \right) b^2$$

§ 4.1.2.1 Écoulement de Couette.

c) la même situation que précédemment mais le plan inférieur est en translation suivant ox avec une vitesse U . L'équation différentielle est encore

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{dp}{dx}$$

mais $u(b) = 0$, $u(-b) = 0$

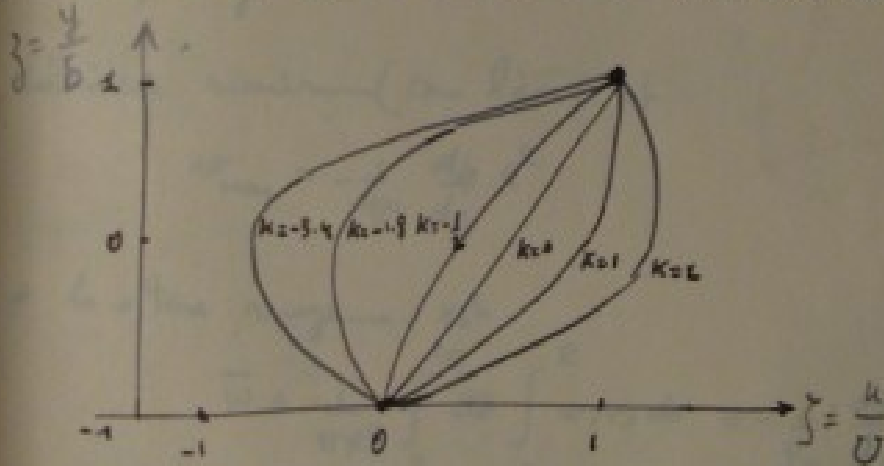
On a alors

$$u(y) = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (b^2 - y^2) + \frac{U}{2b} (y + b)$$

On définit le coefficient

$$k = -\frac{b^2}{\mu U} \frac{dp}{dx}$$

qui est un nombre sans dimension. Mais on a le même résultat :



Profils de vitesse pour l'écoulement de Couette.

Pour $k = -\frac{1}{2}$, la direction du flot s'inverse dans une partie du conduit.

§ 4.1.2.3 flot de Poiseuille dans un conduit cylindrique
 le rayon du conduit est R , l'écoulement est supposé à symétrie
 axiale et stationnaire $w = w(r)$. On a alors $(\nu = \frac{\mu}{\rho})$

$$\frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) = \frac{dp}{dz}$$

les conditions aux bords sont $w(R) = 0$, $w(0) < \infty$. Ici aussi

$\frac{dw}{dz} = 0$ On a donc $\frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) = \frac{r}{\mu} \frac{dp}{dz}$ Soit

$$r \frac{dw}{dr} = \frac{r^2}{2\mu} \frac{dp}{dz} + C_1 \quad \text{soit} \quad \frac{dw}{dr} = \frac{r}{2\mu} \frac{dp}{dz} + \frac{C_1}{r} \quad \text{et}$$

$$w = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} r^2 + C_1 \log r + C_2$$

On obtient alors

$$w(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} (R^2 - r^2) \quad \text{Profil parabolique.}$$

La vitesse maximum (au l'axe) est

$$w_{\max} = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} R^2$$

et la vitesse moyenne est

$$\bar{w} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R w(r) dr = -\frac{1}{8\mu} \frac{dp}{dz} R^2 = \frac{w_{\max}}{2}$$

le débit de masse est

$$\begin{aligned} Q &= \pi R^2 \rho \bar{w} = -\frac{\pi R^4 \rho}{8\mu} \frac{dp}{dz} \\ &= \frac{\pi R^4 \rho}{8\mu} \left(\frac{p_1 - p_2}{L} \right) \end{aligned}$$

- Appendice -

Equations de continuité en coordonnées cylindriques

$$u = v_r, \quad v = v_\theta, \quad w = v_z$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0$$

Equations de N.S. en coordonnées cylindriques

Direction radiale:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + f_r$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u v}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z}$$

Direction azimutale (tangentielle)

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u v}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] + f_\theta$$

Direction axiale

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] + f_z$$

Algèbre tensorielle

Dans la suite, E désignera l'espace euclidien de dimension 3. Un tenseur T est une transformation linéaire de E dans E (aussi appelé tenseur d'ordre 2).

Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ des vecteurs unitaires dans la directions des axes x_1, x_2, x_3 d'un système de coordonnées cartésiennes. Soit $a = a_i e_i$ avec $a_i = e_i \cdot a$ et $b = Ta$. $b = a_1 Te_1 + a_2 Te_2 + a_3 Te_3 = a_j Te_j$ (règle de somme d'Einstein). Les composants de b sont

$$b_i = a_j e_i \cdot Te_j$$

que l'on écrit

$$b_i = T_{ij} a_j \quad \text{ou} \quad T_{ij} = e_i \cdot Te_j$$

ou bien sous forme matricielle.

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Matrice du tenseur T par rapport à l'ensemble des vecteurs unitaires $\{e_1, e_2, e_3\}$. On a

$$Te_i = T_{ji} e_j$$

$$a_j \cdot Te_i = (a_j e_j) \cdot Te_i = T_{ji} a_j$$

On écrit $[T] = [T_{ij}]$ par la matrice de T dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ et $[T'] = [T'_{ij}]$ dans la base $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$.

- ① Soit T et S deux tenseurs d'ordre k , noté $(T+S)$ est l'application linéaire définie par
- $$(T+S)a = Ta + Sa \quad \forall a \in E$$

Produit tensoriel

Le produit tensoriel $a \otimes b$ de 2 vecteurs est le tenseur qui associe à tout vecteur v le vecteur $(b, v)a$

$$(a \otimes b)v = (b, v)a$$

$$(a \otimes b)^T = b \otimes a$$

$$(a \otimes b)(c \otimes d) = (b, c)a \otimes d$$

$$(e_i \otimes e_j)(e_k \otimes e_l) = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ e_i \otimes e_l & i = k \end{cases}$$

$$\sum_i (e_i \otimes e_i) = I$$

$$S = \sum_{i,j} S_{ij} (e_i \otimes e_j)$$

$$[a \otimes b] = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}$$

L'ensemble des tenseurs forme un espace vectoriel et l'addition et la multiplication sont définies point par point

$$(S+T)v = Sv + Tv \quad ; \quad (aS)v = a(Sv)$$

Tenseur identité $Iv = v \quad \forall v$ Produit de 2 tenseurs $S \cdot T = ST$

$$\text{car } (ST)v = S(Tv) \quad ST \neq TS \text{ en général}$$

Transposé : Soit S un tenseur, on transpose et S^T tenseur unique avec la propriété $Su, v = v, S^T u$, $(S+T)^T = S^T + T^T$, $(ST)^T = T^T S^T$

$$\begin{aligned}
 [e_1, e_1] &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}_{e_1} & [e_1, e_2] &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}_{e_1} \\
 [e_1, e_3] &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}_{e_1} & [e_2, e_1] &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}_{e_1} \text{ etc}
 \end{aligned}$$

Comparați din punct de vedere

$$\text{Să se verifice } (TS)a = T(Sa)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Am } (TS)_{ij} &= e_i \cdot (TS) e_j = e_i \cdot T(S e_j) = e_i \cdot T S_{mj} e_m \\
 &= S_{mj} (e_i T e_m) \text{ sau}
 \end{aligned}$$

$$(TS)_{ij} = T_{im} S_{mj}$$

$$(ST)_{ij} = S_{im} T_{mj}$$

$$\text{Transpoziție } T_{ij} = T_{ji}^T$$

Transformații ortogonale

Păi definim Q să fie o transformare ortogonală în $Qa \cdot Qb = a \cdot b$

$$\text{într-un } Qa \cdot Qb = b \cdot Q^T(Qa) = a \cdot b \quad \forall a, b$$

$$\text{Am } Q^T Q = I. \quad \text{Se transpozi din transformare ortogonală}$$

$$\text{șine să arătăm ortogonală deci } Q \cdot Q^T = Q^T \cdot Q = I$$

$$\text{Am } Q_{im} Q_{mj}^T = Q_{im} Q_{jm} = \delta_{ij}$$

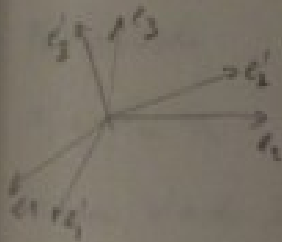
loi de transformation pour la composante cartésienne des vecteurs et des tenseurs.

Soient $\{e_1, e_2, e_3\}$ et $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ deux bases orthogonales de E . Ces 2 systèmes sont reliés par une transformation orthogonale

$$e'_i = Q_{ji} e_j = Q_{ji} e_m$$

Notons que

$$Q_{mi} = e_m \cdot Qe_i = e_m \cdot e'_i = a_m (e_m \cdot e'_i)$$



Soit $a_i = e_i \cdot a$

$$a'_i = e'_i \cdot a = Q_{mi} e_m \cdot a$$

Donc

$$a'_i = Q_{mi} a_m$$

En forme matricielle

$$\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$[a]' = [Q]^T [a]$$

Tenseurs :

$$e_i \rightarrow T_{ij} = e_i \cdot T e_j$$

$$\begin{aligned} e'_i &\rightarrow T'_{ij} = e'_i \cdot T e'_j = Q_{mi} e_m \cdot T Q_{nj} e_n \\ &= Q_{mi} Q_{nj} T_{mn} \end{aligned}$$

Donc

$$T'_{ij} = Q_{mi} Q_{nj} T_{mn}$$

En forme matricielle

$$\begin{pmatrix} T'_{11} & T'_{12} & T'_{13} \\ T'_{21} & T'_{22} & T'_{23} \\ T'_{31} & T'_{32} & T'_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix}$$

Les éqns (7) et (8) indiquent que si les composantes d'un vecteur ou d'un tenseur sont connues dans une base ^{ou} autre, elles le sont dans toute autre base ortho. Autrement dit, les composantes a_i (ou T_{ij}) par rapport à un ensemble $\{e_i, e_j\}$ caractérisent uniquement un vecteur (un tenseur).

On peut utiliser l'expression "nit un tenseur T_{ij} "
En fait, il est souvent commode de définir un tenseur en l'un de ses propriétés de transformation dans différentes bases.
Par exemple $\alpha = \alpha$ tenseur d'ordre 0 (un scalaire)
 $a'_i = Q_{mi} Q_{mj} a_j$ tenseur d'ordre 1 (vecteur) $T'_{ij} = Q_{mi} Q_{mj} T_{mn}$
tenseur d'ordre 2 (tenseur), $T'_{ijk} = Q_{mi} Q_{mj} Q_{nk} T_{mnv}$
tenseur d'ordre 3 etc...

Exercice : 2.7

Une autre façon de définir un tenseur d'ordre 3 est de dire que si M est un tenseur d'ordre 3, si pour tout vecteur a , Ma est un tenseur d'ordre 2 et $M(a \otimes b) = \alpha Ma + \beta Mb$.

$$M_{ijk} = e_i \cdot (M e_j) e_k$$

Les M_{ijk} vérifient la règle de transformation. Par exemple les tenseurs $a \otimes b \otimes c$ définissent

$$(a \otimes b \otimes c)h = (a \otimes b) c \cdot h$$

un tenseur d'ordre 3 (produit tensoriel de vecteurs)

En fait, tout tenseur d'ordre 3 écrit

$$M = M_{ijk} e_i \otimes e_j \otimes e_k$$

(Ceci le généralise)

en fait

$$[T]' = [Q]^T [T] [Q]$$

de manière équivalente

$$T_{ij} = Q_{in} Q_{jm} T'_{nm}$$

$$[T] = [Q] [T]' [Q]^T$$

Tenseur symétrique et antisymétrique

un tenseur est dit symétrique si $T = T^T$

on a alors

$$T_{ij} = (T^T)_{ij} = T_{ji}$$

Ainsi si $T = -T^T$

$$\text{On a } T = T^S + T^A$$

$$\text{ou } T^S = \frac{1}{2} (T + T^T) \quad T^A = \frac{1}{2} (T - T^T)$$

Vecteur dual d'un tenseur antisymétrique (ou vecteur axial)

Pour tout tenseur antisymétrique, on peut trouver un vecteur, appelé vecteur axial de T , noté t^A , tel que

$$T_a = t^A \times a$$

on a

$$t^A = (T_{23} e_1 + T_{31} e_2 + T_{12} e_3)$$

$$\text{ou } 2t^A = -\epsilon_{ijk} T_{jk} e_i$$

où ϵ_{ijk} est le tenseur d'ordre complètement antisymétrique

$$\epsilon_{ijk} = 0 \text{ si } i=j \text{ ou } j=k \text{ ou } i=k$$

$$\epsilon_{123} = 1 \quad (\text{et p.c.}) \quad \epsilon_{231} = -\epsilon_{123} \quad (\text{et p.c.})$$

valeurs propres et vecteurs propres d'un tenseur T

Soit un tenseur qui se transforme avec T en un vecteur qui lui est parallèle i.e. $Ta = \lambda a$, alors a est vecteur propre et λ est valeur propre de T . Les v.p. sont obtenus à l'aide de l'équation $\det[T - \lambda I] = 0$.

Dans le milieu, on se rencontre différents tenseurs (tenseur des contraintes, strain tenseur, tenseur de base de déformation) qui sont symétriques. On a le résultat suivant. Les valeurs propres d'un tenseur symétrique sont réelles (valeurs principales) avec des directions principales toujours orthogonales qui sont orthogonales.

La matrice de tenseur dans la base $\{h_1, h_2, h_3\}$ devient matrice réelle par la 3 directions principales est alors $[T]_{h_1 h_2 h_3} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ λ_i v.p.

On a le résultat suivant (mini-max) soit $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ les valeurs principales de T , alors $\lambda_1 \geq T_{ii} \geq \lambda_3$ dans toute autre base, $\forall i$.

Invariants scalaires d'un tenseur

L'équation caractéristique d'un tenseur T , $\det[T - \lambda I] = 0$ est une équation cubique en λ .

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0$$

où

$$I_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33} = T_{ii}$$

= Somme sur les indices répétés

$$I_1 = \frac{1}{2} (T_{11} T_{11} + T_{22} T_{22} + T_{33} T_{33}) = |T_{11} \ T_{12}| + |T_{22} \ T_{23}| + |T_{33} \ T_{31}|$$

$$I_2 = \text{Det} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} = \text{Det}[T]$$

Comme la valeur propre ne dépendent pas du choix du système de base $\{e_1, e_2, e_3\}$, les coefficients de l'équation cubique doivent être les mêmes pour $\{e_1, e_2, e_3\}$. Ils sont appelés invariants scalaires de T . (Ceci peut être montré aussi directement)

En termes de valeurs principales, on a

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

$$I_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1$$

$$I_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

Fonctions d'un scalaire à valeurs tensorielles

Soit $T \in T(t)$ une fonction d'un scalaire t à valeurs tensorielles ($t \in \text{l'espace}$) la dérivée de T est

$$\frac{dT}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{T(t + \Delta t) - T(t)}{\Delta t}$$

Donc,

$$\frac{d}{dt} (\alpha(t) T(t)) = \frac{d\alpha}{dt} T + \alpha \frac{dT}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} (TS) = \frac{dT}{dt} S + T \frac{dS}{dt}$$

(Avec T et S des tenseurs)

$$\frac{d}{dt}(T a) = \frac{dT}{dt} a + T \frac{da}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(T^T) = \left(\frac{dT}{dt}\right)^T$$

Ex: Soit Q une matrice $n \times n$ telle que $\frac{dQ}{dt} = Q^T$ est antisymétrique ou $Q(t)$ orthogonal

Ex: la rotation d'un corps solide peut être représentée par une rotation $R(t)$ tel que tout vecteur v_0 est transformé par une rotation en $v(t) = R(t)v_0$. On a alors

$$\frac{dv}{dt} = \omega \wedge v \quad \text{où } \omega \text{ est le vecteur axial de la rotation}$$

Champs scalaires, gradient d'une fonction scalaire

Soit $\phi(r)$ un champ scalaire (ex. température, densité, potentiel électrique). On aura

$$d\phi = \phi(r + dr) - \phi(r) = \nabla \phi \cdot dr \quad dr = |dr|$$

Soit $\underline{e} = \frac{dr}{|dr|}$ alors $\left(\frac{d\phi}{dr}\right)_{\text{direction } \underline{e}} = \nabla \phi \cdot \underline{e}$

Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ Comme $\left(\frac{d\phi}{dr}\right)_{e_1} = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \nabla \phi \cdot e_1$

$$\left(\frac{d\phi}{dr}\right)_{e_2} = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = \nabla \phi \cdot e_2 \quad \text{et}$$

$$\left(\frac{d\phi}{dr}\right)_{e_3} = \frac{\partial \phi}{\partial x_3} = \nabla \phi \cdot e_3$$

On a $\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} e_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_3} e_3$

Exemple: q représente le vecteur flux d'énergie (taux de transfert d'énergie par unité de surface)

la loi de Fourier est $q = -k \nabla \phi$

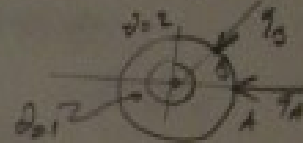
si θ est le champ de température et h est le coeff. de conductivité thermique. $h \theta = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$

$$\nabla \theta = \frac{\partial \theta}{\partial x} e_1 + \frac{\partial \theta}{\partial y} e_2 = x e_1 + y e_2$$

$$q = -4h(x e_1 + y e_2)$$

ou $q_A = -4h e_1$ $q_B = -4h(e_1 + e_2)$

En $A(1,0)$ $B(1,1)$



Plus généralement, la loi de conduction de la chaleur a la forme

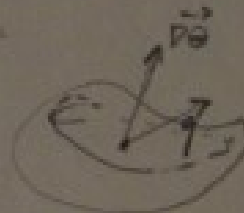
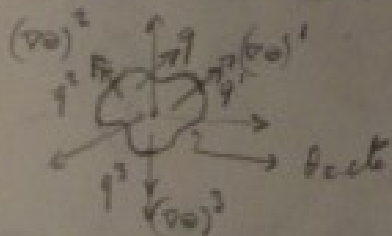
$$q = -K \nabla \theta$$

si K est le tenseur de conductivité thermique.

(dans le cas précédent $K = hI$.) h, K est symétrique, dans les 3 directions principales de K , on a:

$$q^1 = -k_1 (\nabla \theta)^1, (\nabla \theta)^1 \text{ fait par val. propre de } K \text{ (etc.)}$$

$$q^2 = -k_2 (\nabla \theta)^2, q^3 = -k_3 (\nabla \theta)^3$$



$\nabla \theta$ n'est pas une direction propre.

Champs vectoriel, gradient d'un champ vectoriel.

Soit $\underline{v}(\underline{r})$ un champ vectoriel (champ continu (a.s.))
 et $\underline{r}$ associé à $\underline{v}(\underline{r})$, un champ de tenseurs, appelé le
 gradient de $\underline{v}$, $\underline{Dv}$. C'est le tenseur de rang 2 tel
 que $\underline{dv} = \underline{v}(\underline{r} + d\underline{r}) - \underline{v}(\underline{r}) = (\underline{Dv}) d\underline{r}$.

$$\text{Soit } \underline{e}_2 = \frac{d\underline{r}}{dr} \quad \left(\frac{d\underline{v}}{dr} \right)_{\text{direction } \underline{e}_2} = (\underline{Dv}) \underline{e}_2$$

$$\left(\frac{d\underline{v}}{dr} \right)_{\underline{e}_1} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial x_1} = (\underline{Dv}) \underline{e}_1 \quad \text{D'où}$$

$$(\underline{Dv})_{11} = \underline{e}_1 \cdot (\underline{Dv}) \underline{e}_1 = \underline{e}_1 \cdot \frac{\partial \underline{v}}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} (\underline{e}_1 \cdot \underline{v}) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}$$

Plus généralement

$$(\underline{Dv})_{ij} = \underline{e}_i \cdot (\underline{Dv}) \underline{e}_j = \underline{e}_i \cdot \frac{\partial \underline{v}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\underline{e}_i \cdot \underline{v}) = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

$$[\underline{Dv}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Trace d'un tenseur d'ordre 2

La trace de tout produit tensoriel $\underline{a} \otimes \underline{b}$ est
 définie par $\underline{a} \cdot \underline{b}$ i.e. $\text{Tr}(\underline{a} \otimes \underline{b}) = \underline{a} \cdot \underline{b}$. La
 trace d'une combinaison linéaire de prod. tensoriel est
 définie comme

$$\text{Tr}(\alpha \underline{a} \otimes \underline{b} + \beta \underline{c} \otimes \underline{d}) = \alpha \text{Tr}(\underline{a} \otimes \underline{b}) + \beta \text{Tr}(\underline{c} \otimes \underline{d})$$

Propriétés du produit scalaire

On a

$$\text{Tr}(a \otimes b) = a_i b_i$$

Comme tout tenseur d'ordre 2 s'écrit $T = T_{ij} e_i \otimes e_j$

$$\text{car } \text{Tr } T = \text{tr}(T_{ij} e_i \otimes e_j) = T_{ij} \text{Tr}(e_i \otimes e_j) = T_{ij} \delta_{ij}$$

$$\text{ie } \text{Tr } T = T_{ii} \quad \text{On a } \text{Tr}(T^T) = \text{Tr}(T) \quad \text{et}$$

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$$

Si T est symétrique et W antisymétrique, alors
 $\text{Tr}(TW) = 0$

Divergence d'un champ vectoriel, Divergence d'un champ tensoriel

Soit $\underline{v}(x)$ un champ vectoriel - Par définition

$$\text{div } \underline{v} = \text{Tr}(\nabla \underline{v})$$

$$\text{ie } \text{div } \underline{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

Soit $T(x)$ un tenseur d'ordre 2 Par définition,

$\text{div } T$ est un champ vectoriel tel que $\forall \underline{a}$

$$(\text{div } T) \cdot \underline{a} = \text{div}(T^T \underline{a}) = \text{Tr}(T^T (\nabla \underline{a}))$$

Comprimons. Soit $\underline{b} = \text{div } T$ (rappelons $\nabla e_i = 0$ pour des coordonnées cartésiennes)

$$\begin{aligned} b_i = \underline{b} \cdot \underline{e}_i &= \text{div}(T^T \underline{e}_i) = \text{Tr}(T^T \nabla \underline{e}_i) = \text{div}(T_{im} \underline{e}_m) \\ &= \frac{\partial T_{im}}{\partial x_m} \end{aligned}$$

D'où

$$\text{div } T = \frac{\partial T_{im}}{\partial x_m} \underline{e}_i$$

Rotationnel d'un champ vectoriel

Soit $\underline{v}(\underline{x})$ un champ vectoriel. Par définition

$$\text{rot } \underline{v} = \nabla \wedge \underline{v}$$

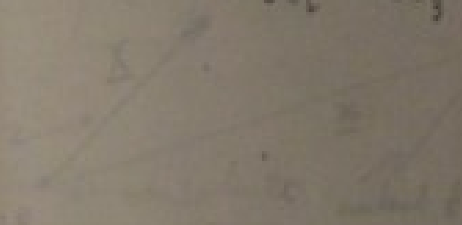
où $\wedge$ est le produit vectoriel de $(\nabla)^A$, partie antisymétrique de ∇

$$(\nabla)^A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \\ \text{Anti} & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \\ \text{Anti} & \text{Anti} & 0 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\text{rot } \underline{v} = \nabla \wedge \underline{v} = -2 \left(T_{23} \underline{e}_1 + T_{31} \underline{e}_2 + T_{12} \underline{e}_3 \right)$$

$$\text{rot } \underline{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) \underline{e}_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) \underline{e}_2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \underline{e}_3$$



Soit la position de la particule à l'instant t .
Plus une équation de la forme

$$\underline{x} = \underline{x}(t, \underline{c}) \quad \text{avec } \underline{x}(t_0, \underline{c}_0) = \underline{x}_0$$

donne la trajectoire de chaque particule - qui, à l'instant $t=t_0$, se trouve à $\underline{x}_0$ (on définit les différentes particules)

pour $\underline{x}_0 = \underline{x}_0(t_0, \underline{c}_0)$ et $\underline{c}_0 = \underline{c}_0(t_0, \underline{x}_0)$

donc on écrit

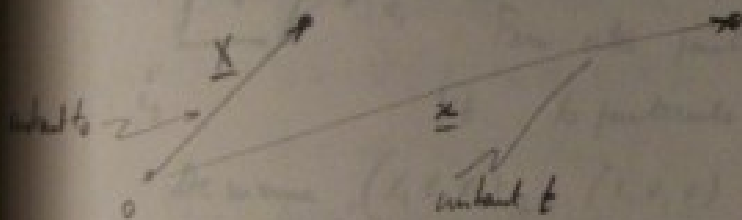
$$\underline{x} = \underline{x}(t, \underline{c})$$

45 Cinématique d'un milieu continu

3.1 Description des mouvements d'un milieu continu

Pour le reste, on appellera "particule" dans un milieu continu, un volume infinitésimal du milieu considéré. On s'intéresse ici à la cinématique de ces particules.

Supposons qu'un corps, à un certain instant t_0 , occupe une certaine région de l'espace physique. La position d'une particule à cet instant peut être décrite par une certaine position $\underline{x}$ mesurée à partir d'un certain point fixe O .



Soit $\underline{x}$ la position de la particule à l'instant t . Plus une équation de la forme

$$(3.1) \quad \underline{x} = \underline{x}(\underline{X}, t) \quad \text{avec} \quad \underline{x}(\underline{X}, t_0) = \underline{X}$$

décrit la trajectoire de chaque particule qui, à l'instant $t = t_0$ est localisée en $\underline{X}$ (on a différent $\underline{X}$ pour différentes particules)

$$\text{Soit } \underline{X} = X_1 \underline{e}_1 + X_2 \underline{e}_2 + X_3 \underline{e}_3 \quad \text{et} \quad \underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3$$

Alors (3.1) s'écrit

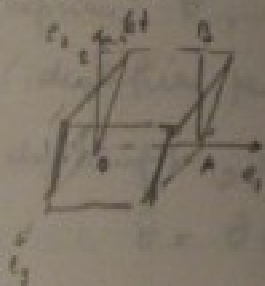
$$(3.2) \quad x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t) \quad \text{ou} \quad x_i = x_i(\underline{X}, t)$$

avec $x_i = x_i(x_1, x_2, x_3, t_0)$ dans (3.2) le triplet (x_1, x_2, x_3) sert à identifier les différentes particules du corps et l'est appelé triplet des coordonnées matérielles.
 (3.1) et (3.2) définit un mouvement du milieu. On rappelle que pour une particule donnée, l'équation définit une trajectoire de la particule.

Exemple: Soit le mouvement

$$\underline{x} = \underline{X} + kt \underline{x}_2 \underline{e}_1, \quad t=0 \quad (x_1, x_2, x_3) \text{ position d'une particule.}$$

Soit un corps, qui à $t=0$, a la forme d'un cube de côté unité, le côté étant parallèle aux axes. A l'instant t , ce cube a l'allure suivante



En effet, à $t=0$, la particule O est localisée en $(x_1, x_2, x_3)_O = (0, 0, 0)$

Pour cette particule $(x_1, x_2, x_3)_O = (0, 0, 0)$

$\forall t$, la particule reste en $O \quad \forall t$.

De même, $(x_1, x_2, x_3)_A = (1, 0, 0)$ et $(x_1, x_2, x_3)_A = (1, 0, 0)$

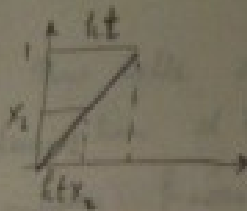
$(x_1, x_2, x_3) = (1 + kt, 0, 0)$, $x_2 = x_2$, $x_3 = x_3$. De même, pour toute la particule sur OA $(x_1, x_2, x_3)_{OA} = (x_1, 0, 0)$ et

$(x_1, x_2, x_3)_{OA} = (x_1, 0, 0)$ OA reste fixe

Pour CB , $(x_1, x_2, x_3)_{CB} = (x_1, 1, 0)$ et $(x_1, x_2, x_3)_{CB} = (x_1 + kt, 1, 0)$ donc toutes ces particules sont déplacées horizontalement de kt .

Pour OC $(x_1, x_2, x_3)_{OC} = (0, x_2, 0)$ et $(x_1, x_2, x_3)_{OC} = (kt x_1, x_2, 0)$

Ces particules restent sur une droite. Idem pour AB .



On a un exemple simple de mouvement avec accélération.

3.1 Description matérielle et description spatiale

Puis qu'un milieu continu est en mouvement, les quantités physiques qui sont associées aux particules (température, vitesse, ...) changent dans le temps. On peut décrire les changements de deux manières suivantes :

1. En suivant les particules c.à.d. on exprime $\theta, v, \dots$ comme des fonctions des particules (identifiées par des coordonnées matérielles x_1, x_2, x_3) et du temps, ie on exprime

$$\theta = \theta(x_1, x_2, x_3, t)$$

$$v = v(x_1, x_2, x_3, t)$$

Une telle description est appelée description matérielle ou lagrangienne.

2. En observant les changements en des points fixes ie on exprime $\theta, v, \dots$ etc comme des fonctions de positions fixes et du temps. Alors

$$\theta = \theta(x, y, z, t)$$

$$v = v(x, y, z, t)$$

Une telle description est dite spatiale ou description d'Euler. Le triplet (x, y, z) localise les positions fixes de points dans l'espace physique et sont appelées coordonnées spatiales. Les x_i d'une particule sont reliés aux X_i par.

$$x_i = x_i(X_i, t)$$

Les positions spatiales fixes sont occupées par des particules différentes quand le temps varie.

Dérivée matérielle

Le taux de changement dans le temps d'une quantité (comme la température ou la vitesse par ex) d'une particule matérielle, est appelée dérivée matérielle. notée $\frac{D}{Dt}$

(i) Quand une description matérielle de la quantité est utilisée $\theta = \theta(x, y, z, t)$, alors

$$\frac{D\theta}{Dt} = \left. \frac{\partial \theta}{\partial t} \right|_{x_i \text{ fixes}}$$

(ii) quand une description spatiale est utilisée $\theta = \theta(X_1, X_2, X_3, t)$, alors

$$\frac{D\theta}{Dt} = \left. \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \right|_{x_i \text{ fixes}} = \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial t} + \left. \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \right|_{x_i \text{ fixes}}$$

où les $\frac{\partial x_i}{\partial t}$ sont calculés par X_i fixes

Quand on utilise des coordonnées cartésiennes,
 $\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)_{x_i \text{ fixé}}$ et la composante v_i de la vitesse de la
 particule et donc

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \theta}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial \theta}{\partial x_3}$$

$$\text{ie } \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial t} + v \cdot \nabla \theta$$

$$\theta = \theta(x_1, x_2, x_3, t)$$

la dernière relation est valable dans tout système de coordonnées.

Accélération d'une particule lorsqu'on se change de

vitesses
 l'accélération d'une particule est le taux
 de variation dans le temps de sa vitesse. C'est donc
 la densité matérielle de la vitesse. Si le mouvement
 du milieu est décrit par

$$\underline{x} = \underline{x}(\underline{X}, t) \text{ avec } \underline{x}(\underline{X}, t_0) = \underline{X}$$

alors la vitesse v , au temps t , d'une particule X
 est

$$v \equiv \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{X \text{ fixé}} \equiv \frac{Dx}{Dt}$$

et l'accélération a , au temps t , de la particule X est

$$a \equiv \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{X \text{ fixé}} \equiv \frac{Dv}{Dt}$$

Dans, si la description matérielle de la vitesse $\underline{v}(X,t)$ est connue, alors l'accélération s'obtient simplement en prenant la dérivée partielle par rapport au temps de $\underline{v}(X,t)$.

D'autre part, si on ne connaît que la description spatiale (ie $\underline{v} = \underline{v}(x,t)$), le calcul s'est par aussi simple. Soit $\underline{v} = v_1(x_1, x_2, x_3, t) \underline{e}_1 + v_2(\dots) \underline{e}_2 + v_3(\dots) \underline{e}_3$ (coord cart), $\underline{e}_i$ fixes, alors l'accélération est

$$\underline{a} = \frac{D\underline{v}}{Dt} = \frac{\partial v_1}{\partial t} \underline{e}_1 + \frac{\partial v_2}{\partial t} \underline{e}_2 + \frac{\partial v_3}{\partial t} \underline{e}_3$$

$$\text{ou } \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_i}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_i}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_i}{\partial x_3}$$

$$\text{Donc } a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

ou bien (valable dans tout syst. de coordonnées)

$$\underline{a} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\nabla \underline{v}) \cdot \underline{v}$$

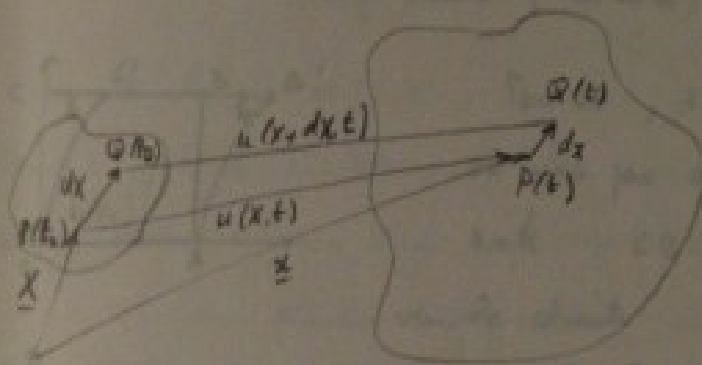
→ Formule (1)

— N —

Déformations

Supposons qu'un corps occupe certaine configuration à un certain instant de référence t_0 change vers une autre configuration à l'instant t . Un point matériel typique P subit un déplacement u ; il arrive donc à la position

$$\underline{x} = \underline{X} + \underline{u}(\underline{X}, t)$$



Un point voisin Q en $X + dX$, à l'instant t_0 , est en, en

$$x + dx = X + dX + u(X + dX, t) \quad \text{ou}$$

$$dx = dX + u(X + dX, t) - u(X, t)$$

On peut écrire cette équation

$$(2) \quad dx = dX + (\nabla u) dX$$

où ∇u est un tenseur du second ordre connu comme le gradient de déplacement (la rapport à X) - la matrice de (∇u) la rapport à un syst. cartésien est

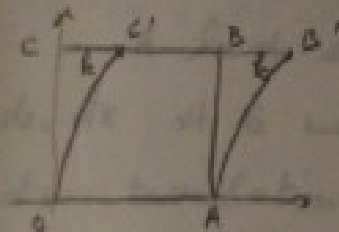
avec $X_i, X_i e_i$

$$(\nabla u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

Exemple: Soit un déplacement de composantes

$$u_1 = \frac{1}{2} X_2^2 \quad u_2 = u_3 = 0$$

sur un carré de côté unité, les côtés étant parallèles à l'axe des X_i



Pour OA, $X_2 = 0$ et $u_1 = u_2 = u_3 = 0$

OA n'est pas déplacé. Pour CB, $X_2 = 1$

$u_1 = \frac{1}{2}$ CB est déplacé de $\frac{1}{2}$ unités

vers la droite

Pour OC + AB, $X_1 = 0$ $u_1 = \frac{1}{2} X_2^2$

Parallèles à l'axe des X_2

On peut calculer (∇u) au point C

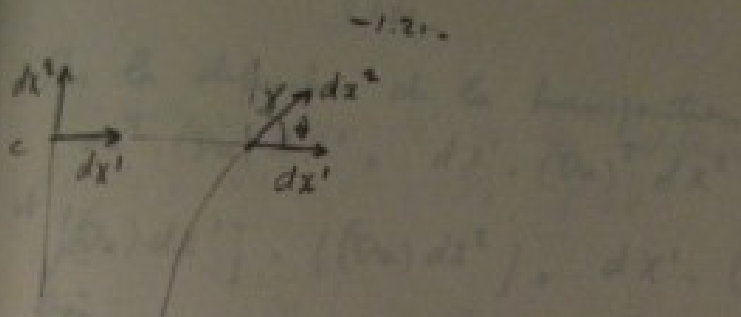
$$(\nabla u)_C = \begin{bmatrix} 0 & 2X_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{X_1=0} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit dX^1 et dX^2 des éléments différentiels en C ($t=0$)

$dX^1 = dX_1 e_1$, $dX^2 = dX_2 e_2$. la déformation de ces éléments différentiels s'obtient : l'application de $(\nabla u)_C$

$$dX^1 = dX^1 + (\nabla u) dX^1 = dX_1 e_1 + 0$$

$$dX^2 = dX^2 + (\nabla u) dX^2 = dX_2 e_2 + 2X_2 dX_2 e_1$$



On a $\frac{|dx'|}{|dx|} = 1$ et $\frac{|dy'|}{|dy|} = (1 + \frac{v^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}$

l'angle entre ces éléments différentiels pour $\frac{v}{c} = \frac{\beta}{1} = \beta$

tel que $\cos \theta = \frac{dx' \cdot dx}{|dx'| \cdot |dx|} = \frac{\frac{v}{c}}{(1 + \frac{v^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}}$ soit $\theta = \frac{\pi}{2} - \theta$

A l'aide de (3.7), on voit que si $Vu = 0$, alors $dx = dx'$ et le mouvement du voisinage de P est celui d'une translation d'un corps solide.

Cependant on peut avoir deux systèmes matériels dx' et dx'' issus de P. Dans le mouvement, dx' devient dx'_1 et dx'' devient dx''_1 de telle façon que

$$dx'_1 = dx' + (Vu) dx'$$

$$dx''_1 = dx'' + (Vu) dx''$$

Une mesure de la déformation est donnée par le produit scalaire $dx' \cdot dx''$.

$$dx'_1 \cdot dx''_1 = dx' \cdot dx'' + dx' \cdot (Vu) dx'' + dx'' \cdot (Vu) dx'$$

$$+ \{ (Vu) dx' \} \cdot \{ (Vu) dx'' \}$$

Par la définition de la transformation

$$dx^2 \cdot (Du) dx^1 = dx^1 \cdot (Du)^T dx^2$$

$$\Rightarrow \{ (Du) dx^1 \} \cdot \{ (Du) dx^2 \} = dx^1 \cdot (Du)^T (Du) dx^2$$

Où

$$dx^1 \cdot dx^2 = dx^1 \cdot dx^2 + dx^1 \cdot \{ (Du) + (Du)^T + (Du)^T (Du) \} dx^2$$

Soit

$$E^* = \frac{1}{2} \{ (Du) + (Du)^T + (Du)^T (Du) \}$$

Alors

$$dx^1 \cdot dx^2 = dx^1 \cdot dx^2 + 2 dx^1 \cdot E^* dx^2$$

On voit que si $E^* = 0$, alors $dx^1 \cdot dx^2 = dx^1 \cdot dx^2$

E^* caractérise donc la déformation d'un voisinage de la particule P , et est connu comme le tenseur lagrangien des tensions (contrainte)

Les composantes de E^* (en coordonnées) sont

$$E^*_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right\}$$

Par ailleurs, les déformations des corps sont telles que les amplitudes des composantes du gradient de déplacement $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ sont bien inférieures à l'unité (régulièrement $\approx 10^{-4}$) d'où les termes produits dans E^* peuvent être négligés. On a alors

$$E^* \approx \frac{1}{2} \{ (Du) + (Du)^T \} = (Du)^s$$

On a donc, pour de faibles déformations

$$dx' \cdot dx' = dx' \cdot dx' + 2 dx' \cdot E dx'$$

où

$$E = \frac{1}{2} \{ (\nabla u) + (\nabla u)^T \}$$

∇u est antisymétrique $dx' \cdot dx' = dx' \cdot dx'$ Ceci caractérise une rotation infinitésimale d'un corps rigide dans un voisinage de la particule P .

Le tenseur

$$\Omega = \frac{1}{2} \{ (\nabla u) - (\nabla u)^T \}$$

est appelé tenseur de rotation infinitésimale. Le vecteur axial définit l'axe et l'angle de cette rotation.

E est le tenseur des contraintes

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$$[E] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

On a aussi l'interprétation géométrique suivante :
Pour interpréter les éléments diagonaux, soit $dx' = dx'$
 $= (ds)u$ où u est un vecteur unitaire arbitraire. Soit
même, soit $ds = |dx'|$

Alors

$$(ds)^2 = (ds)^2 + 2(ds)^2 n \cdot En$$

Pour de petites déformations $(ds)^2 = (ds)^2 = (ds - ds)(ds + ds)$
 $= 2ds(ds - ds)$ D'où

$$\frac{ds - ds}{ds} = n \cdot En$$

Donc, la variation de longueur par unité de longueur, connue comme l'unité d'élongation, ou contrainte normale.

Par exemple, si $n = e_1$,

$$E_{11} = e_1 \cdot E e_1$$

est l'élongation unitaire par un élément initialement dans la direction e_1 . Idem pour E_{22} et E_{33} .

Pour interpréter les éléments non diagonaux, soit $dx' = (ds_1)n$ et $dx'' = (ds_2)m$ où n et m sont orthogonaux. Alors, on a

$$(ds_1)(ds_2) \cos \theta = 2(ds_1)(ds_2) n \cdot m$$

où θ est l'angle entre dx' et dx'' . Si $\theta = \frac{\pi}{2} - \gamma$, alors γ mesure la déviation en angle entre dx' et dx'' . $\gamma =$ arailllement de contrainte. Comme

$\cos(\frac{\pi}{2} - \gamma) = \sin \gamma$ et pour de faibles contraintes $\sin \gamma \approx \gamma$

$\frac{ds_1}{ds_1} \approx \frac{ds_2}{ds_2}$, alors

$$\gamma = 2m \cdot En$$

Et si $m = e_1, n = e_2$, $2E_{12}$ donne la déviation en angle entre 2 éléments initialement dans les directions e_1 et e_2 .

Contraintes principales

Comme le tenseur des contraintes est symétrique, il existe trois directions mutuellement perpendiculaires n_1, n_2, n_3 par rapport auxquelles la matrice de σ est diagonale.

$$[\sigma]_{n_1, n_2, n_3} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{bmatrix}$$

Géométriquement, cela signifie que les éléments infinitésimaux dans les directions de n_1, n_2, n_3 restent mutuellement orthogonaux après déformations.

$$dN_i \cdot dN_j = dn_i \cdot dn_j + 2 dn_i \cdot \epsilon_{ij} dn_j = 0$$

$$\Delta(dV) = (dV)' = 2 dn_i \cdot \epsilon_{ij} dn_j = 0 \quad (\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji})$$

Les unités d'allongation dans les directions principales (ie E_1, E_2, E_3) sont les valeurs propres de ϵ . À partir d'un ϵ donné, les contraintes principales sont obtenues à partir de l'équation

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0$$

$$\text{où } I_1 = E_{11} + E_{22} + E_{33}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_{11} & E_{13} \\ E_{31} & E_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_{22} & E_{23} \\ E_{32} & E_{33} \end{vmatrix} \quad \text{III-2-2}$$

$$I_3 = \det \epsilon_{ij}$$

I_1, I_2, I_3 sont appelés invariants scalaires du tenseur des contraintes.

Dilatation

Le premier invariant scalaire a une interprétation géométrique simple. Pour une déformation donnée, considérons les 3 lignes matérielles issues d'un seul point P dans les 3 directions principales. Ces lignes définissent un parallélépipède rectangle dont les côtés ont été allongés à partir des dimensions initiales dS_1, dS_2, dS_3 pour donner $dS_1(1+\epsilon_1), dS_2(1+\epsilon_2), dS_3(1+\epsilon_3)$ où ϵ_i sont les contraintes principales.

Don le changement de volume $\Delta(dV)$ dans le volume matériel dV est

$$\begin{aligned}\Delta(dV) &= (dS_1)(dS_2)(dS_3)(1+\epsilon_1)(1+\epsilon_2)(1+\epsilon_3) - dS_1 dS_2 dS_3 \\ &= dV (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) + \text{termes d'ordre plus élevé dans les } \epsilon_i.\end{aligned}$$

Ainsi, pour de faibles déformations

$$e = \frac{\Delta(dV)}{dV} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = \epsilon_{ii}$$

Cette variation de volume élémentaire est appelée dilatation.
(Rem: on a $\epsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \text{div } u$)

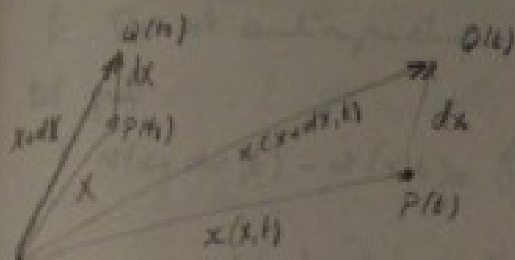
Taux de déformation.

Considérons un élément matériel dX issu d'un point matériel P localisé en X à l'instant t .

On desire calculer $\frac{D}{Dt}(dx)$, le taux de variation de longueur et de direction de l'élément matériel dx .
A partir de $x = x(X, t)$, on a :

$$dx = x(X+dX, t) - x(X, t)$$

voir fig 1.



$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}(dx) &= \frac{D}{Dt} x(X+dX, t) - \frac{D}{Dt} x(X, t) \\ &= v(X+dX, t) - v(X, t) \end{aligned}$$

$$\frac{D}{Dt}(dx) = (\nabla_X v) dX$$

où $\nabla_X v$ est le tenseur gradient de v par rapport à la coordonnée matérielle X . L'équation (3.19) exprime $\frac{D}{Dt}(dx)$ dans une description matérielle. Pour obtenir $\frac{D}{Dt}(dx)$ dans une description spatiale, on note que comme $v(X, t)$ est la vitesse du point matériel présent à l'instant t en x , alors si une description spatiale pour v est utilisée, cette vitesse est donnée par $v = v(x, t)$ ($v(x, t)$ et $v(X, t)$ sont 2 fonctions différentes).

Alors

$$\frac{D}{Dt}(dx) = v(x+dx, t) - v(x, t) = (\nabla_x v) dx$$

Pour conclure, on utilise le fait que la description spatiale et $\nabla v \equiv \nabla_x v$

Par rapport à des coord. cart., les composantes de Dv sont

$$[Dv] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Si Dv est antisymétrique, alors il existe un vecteur ω tel que $v(x+dx, t) - v(x, t) = (Dv) dx = \omega \wedge dx$

$$v(x+dx, t) - v(x, t) = (Dv) dx = \omega \wedge dx$$

Donc, un gradient antisymétrique représente une rotation rigide localement autour de x .

Pour Dv général, on a $Dv = D + W$ où $D = \frac{1}{2} (Dv + (Dv)^T)$ est appelé tenseur de taux de déformation et $W = \frac{1}{2} (Dv - (Dv)^T)$ est appelé tenseur de spin. Son vecteur axial ω est le même angulaire de cette partie du mouvement, représentant une rotation rigide.

$2W$ porte le nom de tenseur de vortécité

$2\omega = \text{rot } v$ " vecteur de vortécité

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \\ \text{sym} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \\ \text{sym} & \text{sym} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

On donne une interprétation géométrique de l'élément diagonal de D . Soit $dx = (ds)_n$. Alors

$$dx \cdot dx = (ds)^2$$

Donc

$$\frac{D}{Dt} (dx \cdot dx) = \frac{D}{Dt} (ds)^2$$

$$\text{ic } 2 dx \cdot \frac{D}{Dt} (dx) = 2 ds \frac{D}{Dt} (ds)$$

$$\text{Mais } \frac{D}{Dt} (dx) = (\nabla v) dx \quad \text{Donc}$$

$$dx \cdot (\nabla v) dx = ds \frac{D}{Dt} (ds)$$

$$\text{ic } (ds)^2 n \cdot (\nabla v) n = (ds) \frac{D}{Dt} (ds)$$

$$\frac{1}{ds} \frac{D}{Dt} (ds) = n \cdot (\nabla v) n = n \cdot Dn + n \cdot Wn$$

Comme $n \cdot Wn = n \cdot W^T n = -n \cdot Wn$, et $n \cdot Wn = 0$

$$\frac{1}{ds} \frac{D}{Dt} (ds) = n \cdot Dn$$

En d'autre terme, $n \cdot Dn$ donne le taux de changement de longueur par unité de longueur, c'est-à-dire le taux d'étirement ou étirement d'un élément matériel dans la direction de n .

De la même manière que précédemment l'interprétation des composantes non diagonales du tenseur de contraintes, τ_{ij} , est le taux de dévissage

à angle ($\vec{e}$ partir de $\frac{\vec{v}}{v}$) de 2 éléments dans les directions e_i et e_j . Comme sous le nom de taux de cisaillement de même, ρdV représente le volume élémentaire d'une particule, on a

$$\frac{1}{dV} \frac{d}{dt}(dV) = D_{11} + D_{22} + D_{33} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \text{div } \vec{v}$$

description prenant une approche de mouvement d'un volume continu sous considération du fait que

l'écoulement est incompressible.

Equation de conservation de la masse

Si l'on suit une particule (petit volume de matière) dans son mouvement, son volume peut changer, mais sa masse totale doit rester inchangée. Soient ρ et dV représentant la densité et le volume d'une particule, alors on a:

$$\frac{d}{dt}(\rho dV) = 0$$

$$\rho \frac{d}{dt}(dV) + dV \frac{d\rho}{dt} = 0$$

A l'aide de (3.18), on a

$$\rho \text{div } \vec{v} + \frac{d\rho}{dt} = 0$$

$$\text{En description spatiale} \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho$$

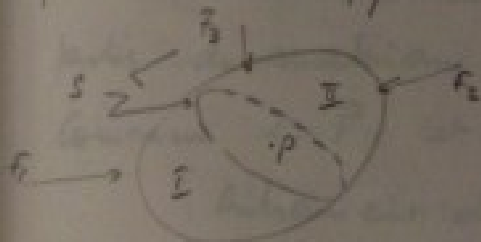
Cette équation est l'équation de conservation de la masse (ou équation de continuité). Si le matériau est incompressible ($\frac{d\rho}{dt} = 0$) alors $\text{div } \vec{v} = 0$

§6. Pression

Dans le chapitre précédent, on a considéré la description purement cinématique du mouvement d'un milieu continu sans considération des forces qui causent le mouvement et la déformation. Dans ce chapitre, on se propose de décrire les forces intérieures qui en sont responsables.

4.1 Vecteur pression

Soit un corps tel qu'on peut le représenter sur la figure. Soit un plan qui passe par un point intérieur P divisant une surface plane S . En P , la normale à S est n .



Considérant I comme un corps libre, il y a sur le plan S une force résultante ΔF agissant sur une petite surface ΔA contenant P . On définit le vecteur



de pression t_n (de I sur I) au point P comme la limite du rapport $\frac{\Delta F}{\Delta A}$ quand $\Delta A \rightarrow 0$

$$t_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

Si la portion Σ est considérée libre, alors par la loi d'action réaction, on aura un vecteur pression (de Σ sur Σ) t_n tel que

$$t_{-n} = -t_n$$

A présent, soit S une surface non nécessairement plane passant par P . Soit ΔF la force résultante sur un petit élément ΔS de la surface S . Le vecteur pression en P sur S est défini par

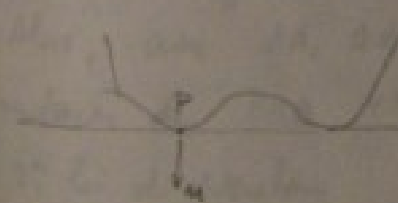
$$t = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}$$

Principe de pression de Cauchy

Le vecteur de pression en tout point donné et à tout instant a une valeur commune sur toute les parties du matériau ayant un plan tangent commun en P et se trouvant du même côté.

Autrement dit, si on est le vecteur unitaire normal au matériau normal au plan tangent

$$t = t(x, y, z) \quad \tau \text{ temps}$$



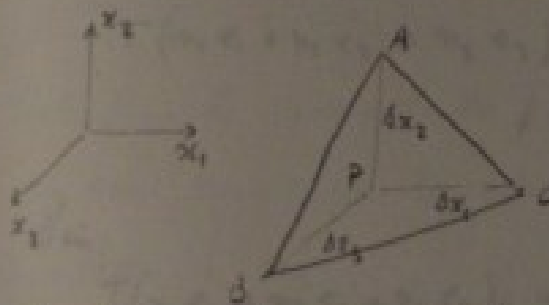
Tenseur des contraintes

Soit T une transformation telle que, si n est un vecteur unitaire normal à un plan, alors le vecteur premier sur le plan (de même sensibilité des mêmes côtés que n) est donné par

$$t_n = Tn$$

On va montrer que T est en fait une transformation linéaire, c'est un tenseur d'ordre 2.

Soit un tétraèdre tel que P occupe un des sommets -



Le vecteur premier sur la face PAB , dont la normale extérieure est dans la direction $-e_1$, est donnée par

(i) $t_{-e_1} = -t_{e_1} = -Te_1$

De la même manière, les vecteurs premiers sur les faces PBC et PAC sont

(ii) (iii) $t_{-e_2} = -Te_2$ $t_{-e_3} = -Te_3$

Plus, avec ΔA_1 , ΔA_2 , ΔA_3 et ΔA_4 représentant les surfaces de PAB , PBC , PAC et ABC , on a par la

1^{re} loi de Newton

$$\Sigma F = t_{-e_1} (\Delta A_1) + t_{-e_2} (\Delta A_2) + t_{-e_3} (\Delta A_3) + t_n (\Delta A_4) = ma$$

Comme le membre est $m = (\text{densité}) \times (\text{volume})$ et le volume est $\frac{1}{6} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$, quand la taille du tétraèdre tend vers zéro, le côté droit de $\underline{T}$ tendra plus vite vers 0 que le membre de gauche. Le terme d'accélération tend vers 0.

Soit le vecteur normal à ABC donné par

$$n = n_1 e_1 + n_2 e_2 + n_3 e_3$$

Les surfaces $\Delta A_1, \Delta A_2, \Delta A_3$ sont les projections de ΔA_n

$$\text{donc} \quad \Delta A_1 = n_1 \Delta A_n \quad \Delta A_2 = n_2 \Delta A_n \quad \Delta A_3 = n_3 \Delta A_n$$

obtenant $\underline{t}_m = Tn$, $\underline{T}$ devient

$$\begin{aligned} T(n_1 e_1 + n_2 e_2 + n_3 e_3) \Delta A_n &= n_1 \Delta A_n T(e_1) \\ &+ n_2 \Delta A_n T(e_2) + n_3 \Delta A_n T(e_3) \\ &+ o(\Delta A_n) \end{aligned}$$

D'où

$$T(n_1 e_1 + n_2 e_2 + n_3 e_3) = n_1 T e_1 + n_2 T e_2 + n_3 T e_3$$

T est linéaire. C'est le tenseur des pressions

Composants du Tenseur des pressions

$$\text{Soit} \quad \underline{t}_{e_1} = T e_1 = T_{11} e_1 + T_{21} e_2 + T_{31} e_3$$

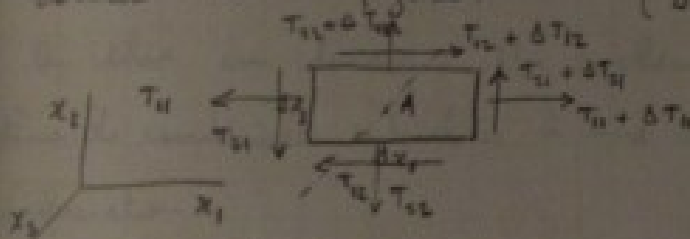
on voit que T_{11} est la composante normale (au premier normal) et T_{21} et T_{31} sont les composantes tangentielles ou composantes de cisaillement du vecteur pression $\underline{t}_{e_1}$ sur le plan dont la normale est e_1 . Sur ce plan, l'amplitude de la composante tangentielle est $(T_{21}^2 + T_{31}^2)^{\frac{1}{2}}$. Idem pour les autres composantes de T .

On aura donc avant $t = T_m$ On a

$$t_i = T_{ij} n_j \quad \text{ou bien} \quad [t] = [T][n].$$

Symétrie du Tenseur de premier. Principe du moment de la quantité de mouvement.

On va montrer que le tenseur de premier est symétrique. Soit un parallélépipède isolé du milieu comme on le figure. (δx_3 non représenté)



Calculons le moment de toutes les forces par rapport à un axe passant par le centre A du parallélépipède et parallèle à x_3 .

$$\begin{aligned} \Sigma M_A = & T_{21} (\delta x_2 \delta x_3) \frac{\delta x_1}{2} + (T_{21} + \delta T_{21}) (\delta x_1 \delta x_3) \frac{\delta x_2}{2} \\ & - T_{12} (\delta x_1 \delta x_3) \frac{\delta x_2}{2} - (T_{12} + \delta T_{12}) (\delta x_1 \delta x_3) \frac{\delta x_2}{2} \end{aligned}$$

Ne considérant pas les termes d'ordre supérieur

$$\Sigma M_A = (T_{21} - T_{12}) \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3$$

= produit d'un volume et du cosinus d'un angle
et on doit donc plus élevé que le terme de droite

$$\text{Donc} \quad T_{12} = T_{21}$$

$$\text{De même} \quad T_{ij} = T_{ji}$$

T est symétrique.